



FEUP
Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Análise Dinâmica com Interação Veículo-Estrutura em Vias de Alta Velocidade

Sérgio Gonçalves Moreira das Neves

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil

Maio de 2008

Aos meus Pais

AGRADECIMENTOS

Ao terminar esta dissertação gostaria de deixar expresso o meu profundo e sincero agradecimento a todas as pessoas e entidades que contribuíram para a sua realização, nomeadamente:

- Ao Professor Álvaro Ferreira Azevedo desejo manifestar um especial agradecimento pela forma pertinente e dedicada com que encarou a elaboração deste trabalho. A disponibilidade que sempre demonstrou e os ensinamentos transmitidos contribuíram decididamente para a realização da presente dissertação;
- Ao Professor Rui Bártolo Calçada, o meu profundo agradecimento pela forma dedicada e atenta com que sempre procurou transmitir-me os ensinamentos necessários e as manifestações de apoio e amizade demonstradas ao longo deste trabalho;
- Ao Professor Raimundo Moreno Delgado pelos importantes ensinamentos transmitidos e por todos os meios materiais que colocou à minha disposição;
- A todos os meus colegas de trabalho pela disponibilidade, paciência e compreensão que sempre demonstraram. Gostaria de realçar o enorme espírito de entreajuda, presente desde o primeiro até ao último momento, e que muito contribuiu para a realização da presente dissertação;
- Por último, mas não menos importante, à minha família por toda a preocupação e disponibilidade que evidenciou ao longo de todo o período da elaboração da presente dissertação.

RESUMO

O principal objectivo da presente dissertação é o estudo e desenvolvimento de metodologias de análise dinâmica com interacção veículo-estrutura em vias ferroviárias de alta velocidade.

O sistema veículo-estrutura é discretizado com recurso ao Método dos Elementos Finitos. A solução numérica das equações de equilíbrio dinâmico é obtida no domínio do tempo, mediante a utilização de técnicas de integração, nomeadamente o método de Newmark e o método- α . Uma especial atenção é dedicada ao ruído numérico, tendo-se recorrido à dissipação algorítmica conferida pelo método- α .

A simulação dos efeitos dinâmicos provocados pela passagem de um veículo sobre uma estrutura, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), pode ser realizada com ou sem a consideração da estrutura do veículo. Quando a estrutura do veículo não é considerada apenas é necessário incluir um conjunto de cargas móveis na análise da estrutura. A simulação do sistema veículo-estrutura requer a consideração de diversas malhas de elementos finitos e as sua compatibilização em pontos de contacto. Este tipo de compatibilização pode necessitar de uma ligação entre dois pontos nodais ou entre um ponto nodal e um ponto interior ao elemento finito. Estas técnicas foram implementadas no programa FEMIX 4.0, que é um código computacional genérico destinado à análise de estruturas pelo MEF.

No âmbito da presente dissertação é analisado o comportamento dinâmico da ponte ferroviária de São Lourenço, que consiste numa ponte metálica do tipo “bowstring” situada na Linha do Norte, num troço recentemente modernizado de modo a permitir a circulação de comboios Alfa pendulares. A resposta da ponte foi avaliada em termos de segurança estrutural e da via e conforto dos passageiros.

ABSTRACT

The aim of the present thesis is to study and develop new methodologies for the dynamic analysis with vehicle-structure interaction in high-speed railway lines.

The vehicle-structure system is discretized by the Finite Element Method. Dynamic equations are solved in the time domain, according to integration schemes, namely the Newmark method and the α -method. Special attention is dedicated to the spurious high frequency oscillations, which have been controlled by means of the algorithmic dissipation provided by the α -method.

The finite element simulation of the dynamic effects caused by the passage of vehicles on structures such as bridges can be performed with or without the consideration of the vehicle's own structure. When this is not taken into consideration only a set of moving loads has to be included in the model of the structure. The simulation of the vehicle-structure system requires the consideration of several independent meshes and their compatibilization in contact points. This compatibilization may require a connection between two nodal points or between a nodal point and a surface point. These techniques have been implemented in FEMIX 4.0, which is a general purpose finite element computer program.

In the scope of this work, the dynamic behavior of the São Lourenço railway bridge was studied. The bridge is a steel bowstring arch located in “Linha do Norte”, in a recently upgraded section for the passage of the Alfa pendular train. The bridge behavior was evaluated in terms of structural and track safety and passenger comfort.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
-------------------------	------

ÍNDICE DE QUADROS	xvii
-------------------------	------

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1	Considerações gerais	1.1
1.2	Investigações anteriores	1.3
1.3	Objectivos e conteúdo da dissertação.....	1.5

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA

2.1	Introdução.....	2.1
2.2	Equação de equilíbrio dinâmico	2.2
2.3	Método dos Elementos Finitos	2.3
2.3.1	Fundamentos do MEF	2.4
2.3.2	Conceitos fundamentais da mecânica estrutural	2.5
2.3.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	2.7
2.3.4	Equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta.....	2.8
2.3.5	Amortecimento.....	2.11

2.3.6	Sólido tridimensional	2.14
2.3.7	Viga tridimensional	2.17
2.4	Resolução da equação de equilíbrio dinâmico	2.26
2.4.1	Método de Newmark	2.30
2.4.1.1	Expressões fundamentais	2.30
2.4.1.2	Matriz de amplificação	2.34
2.4.1.3	Precisão, estabilidade e dispersão	2.35
2.4.1.4	Amortecimento algorítmico	2.38
2.4.2	Método- α de Hilber-Hughes-Taylor	2.40
2.4.2.1	Expressões fundamentais	2.40
2.4.2.2	Matriz de amplificação	2.42
2.4.2.3	Precisão, estabilidade e dispersão	2.43
2.4.2.4	Amortecimento algorítmico	2.45
2.5	Validação	2.47
2.5.1	Sólido tridimensional	2.48
2.5.2	Viga tridimensional	2.50

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

3.1	Introdução	3.1
3.2	Modelação com cargas móveis	3.3
3.2.1	Modelação com cargas concentradas	3.3
3.2.2	Validação	3.5
3.3	Método Iterativo	3.7
3.3.1	Equação de equilíbrio dinâmico	3.8
3.3.2	Compatibilização de deslocamentos	3.10

3.4	Método Directo.....	3.11
3.4.1	Equação de equilíbrio dinâmico.....	3.13
3.4.2	Equação de compatibilidade de deslocamentos	3.21
3.4.3	Sistema de equações misto.....	3.22
3.4.4	Exemplos.....	3.23
3.4.4.1	Contacto entre ponto e elemento.....	3.23
3.4.4.2	Contacto entre dois pontos	3.30
3.4.5	Validação.....	3.36

CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO NO PROGRAMA FEMIX

4.1	Introdução.....	4.1
4.2	Versão inicial do programa FEMIX 4.0.....	4.3
4.2.1	Tipos de análises implementadas	4.3
4.2.2	Estrutura do ficheiro de dados.....	4.3
4.2.3	Biblioteca de funções básicas.....	4.4
4.2.4	Armazenamento de matrizes em memória.....	4.5
4.2.4.1	Armazenamento de todos os termos da matriz	4.6
4.2.4.2	Armazenamento em semibanda de largura variável	4.7
4.2.4.3	Armazenamento esparsa	4.9
4.2.5	Subrotinas do módulo <i>femix</i>	4.10
4.3	Implementação da análise dinâmica.....	4.12
4.3.1	Blocos adicionados ao ficheiro de dados <i>_gl.dat</i>	4.13
4.3.1.1	Parâmetros da análise dinâmica	4.13
4.3.1.2	Parâmetros do amortecimento de Rayleigh.....	4.13
4.3.1.3	Condições dinâmicas iniciais	4.14

4.3.1.4	Duração dos intervalos de tempo e respectivos carregamentos.....	4.15
4.3.2	Implementação do módulo <i>edit_gldat</i>	4.16
4.3.3	Subrotinas implementadas no módulo <i>femix</i>	4.17
4.4	Implementação das cargas móveis	4.20
4.4.1	Modelação com cargas concentradas	4.20
4.4.2	Ficheiros de dados adicionais.....	4.23
4.4.2.1	Cargas concentradas	4.23
4.4.2.2	Percurso das cargas móveis.....	4.25
4.4.3	Subrotinas implementadas no módulo <i>edit_gldat</i>	4.26
4.5	Implementação da interacção veículo-estrutura	4.27
4.5.1	Ficheiros de dados adicionais.....	4.28
4.5.2	Blocos adicionados ao ficheiro de dados <i>_gl.dat</i>	4.29
4.5.2.1	Contacto entre dois pontos nodais.....	4.29
4.5.2.2	Contacto entre ponto e elemento	4.30
4.5.3	Subrotinas implementadas no módulo <i>edit_gldat</i>	4.30
4.5.4	Subrotinas implementadas no módulo <i>femix</i>	4.31

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA PONTE FERROVIÁRIA DE SÃO LOURENÇO

5.1	Introdução.....	5.1
5.2	Descrição da ponte.....	5.2
5.3	Modelação da ponte.....	5.7
5.3.1	Discretização da estrutura	5.7
5.3.2	Propriedades geométricas e mecânicas	5.8
5.3.2.1	Laje.....	5.8
5.3.2.2	Arcos	5.10

5.3.2.3	Apoios	5.13
5.3.2.4	Carril	5.14
5.3.3	Características dinâmicas do modelo numérico	5.15
5.4	Modelação do comboio	5.15
5.5	Comparação entre os resultados numéricos e experimentais	5.17
5.6	Resposta dinâmica do sistema ponte comboio	5.19
5.6.1	Resposta dinâmica da ponte	5.19
5.6.2	Resposta dinâmica do comboio.....	5.20
5.6.3	Avaliação da resposta dinâmica	5.21
5.6.3.1	Segurança estrutural	5.21
5.6.3.2	Segurança da via	5.22
5.6.3.3	Conforto dos passageiros	5.22
5.6.4	Tempos de cálculo.....	5.23

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1	Conclusões.....	6.1
6.2	Perspectivas de desenvolvimentos futuros	6.3

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	R.1
----------------------------------	-----

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Figura 1.1 – Segurança, consumo de energia e emissões de CO ₂ (adaptado de UIC, 2005).....	1.1
Figura 1.2 – Actual rede europeia de alta velocidade (UIC, 2008)	1.2

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA

Figura 2.1 – Volume V sujeito a forças de volume e de superfície	2.5
Figura 2.2 – Relação entre o coeficiente de amortecimento e a frequência angular	2.13
Figura 2.3 – Elemento sólido tridimensional de oito nós com geometria arbitrária.....	2.14
Figura 2.4 – Graus de liberdade da barra $i j$ no referencial local.....	2.18
Figura 2.5 – Barra $i j$ no plano (x_1, x_3)	2.18
Figura 2.6 – Rotações da secção transversal.....	2.20
Figura 2.7 – Raio espectral	2.37
Figura 2.8 – Dispersão	2.38
Figura 2.9 – Coeficiente de amortecimento algorítmico	2.39
Figura 2.10 – Raio espectral	2.44
Figura 2.11 – Dispersão	2.45
Figura 2.12 – Coeficiente de amortecimento algorítmico	2.46
Figura 2.13 – Coeficiente de amortecimento algorítmico	2.47
Figura 2.14 – Sólido sujeito a um conjunto de cargas concentradas	2.48

Figura 2.15 – Resultados correspondentes ao ponto P (ver Figura 2.14)	2.49
Figura 2.16 – Viga sujeita a uma carga concentrada	2.50
Figura 2.17 – Resultados referentes ao ponto P (ver Figura 2.16)	2.51

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

Figura 3.1 – Comboio Alfa pendular e respectivo conjunto de cargas móveis	3.3
Figura 3.2 – Estrutura sujeita à acção de dois conjuntos de cargas móveis.....	3.5
Figura 3.3 – Viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga móvel	3.6
Figura 3.4 – Resultados referentes ao ponto P (ver Figura 3.3)	3.7
Figura 3.5 – Sistema integrado: estrutura e veículo.....	3.8
Figura 3.6 – Subsistemas independentes: estrutura e veículo	3.9
Figura 3.7 – Veículo e estrutura: barras e pontos nodais	3.12
Figura 3.8 – Veículo e estrutura: graus de liberdade e forças de interacção.....	3.12
Figura 3.9 – Barras, pontos nodais e forças exteriores (unidades em metros).....	3.23
Figura 3.10 – Graus de liberdade e forças de interacção	3.24
Figura 3.11 – Barras, pontos nodais e forças exteriores (unidades em metros).....	3.30
Figura 3.12 – Graus de liberdade e forças de interacção	3.31
Figura 3.13 – Viga simplesmente apoiada sujeita à passagem de uma massa suspensa.....	3.36
Figura 3.14 – Deslocamento e aceleração verticais a meio vão da viga	3.37
Figura 3.15 – Deslocamento e aceleração verticais da massa.....	3.38
Figura 3.16 – Força de interacção entre a massa suspensa e a viga simplesmente apoiada	3.38

CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO NO PROGRAMA FEMIX

Figura 4.1 – Semibanda de largura variável da matriz \underline{A}	4.7
--	-----

Figura 4.2 – Termos não nulos do triângulo superior da matriz \underline{A}	4.9
Figura 4.3 – Viga sujeita à passagem do comboio Alfa pendular	4.21
Figura 4.4 – Casca sujeita a um conjunto de cargas móveis.....	4.26

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA PONTE FERROVIÁRIA DE SÃO LOURENÇO

Figura 5.1 – Localização geográfica da ponte de São Lourenço	5.2
Figura 5.2 – Vista geral da ponte de São Lourenço.....	5.3
Figura 5.3 – Vista longitudinal da ponte de São Lourenço	5.3
Figura 5.4 – Alçado da ponte de São Lourenço.....	5.4
Figura 5.5 – Corte transversal da ponte de São Lourenço	5.4
Figura 5.6 – Planta da ponte de São Lourenço	5.5
Figura 5.7 – Ligações entre o arco e a laje: a) vista superior; b) vista inferior.....	5.5
Figura 5.8 – Aparelhos de fixação e de apoio: a) varões <i>Dywidag</i> ; b) apoio guiado; c) apoio móvel.....	5.6
Figura 5.9 – Vistas do encontro da ponte: a) muro de testa; b) muro de ala	5.6
Figura 5.10 – Pormenor da via na ponte	5.7
Figura 5.11 – Modelo numérico da ponte de São Lourenço.....	5.7
Figura 5.12 – Elementos finitos utilizados na modelação da laje.....	5.8
Figura 5.13 – Corte da secção transversal da laje.....	5.9
Figura 5.14 – Ligação tabuleiro-via.....	5.10
Figura 5.15 – Elementos finitos utilizados na modelação do arco	5.11
Figura 5.16 – Aparelho de apoio do tipo <i>AlgaPot</i>	5.13
Figura 5.17 – Secção transversal do carril UIC 54.....	5.14
Figura 5.18 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte.....	5.15
Figura 5.19 – Comboio Alfa pendular e respectivo conjunto de cargas móveis	5.16
Figura 5.20 – Modelo numérico do comboio Alfa pendular	5.16

Figura 5.21 – Modos de vibração e frequências naturais do comboio.....	5.17
Figura 5.22 – Aceleração vertical do tabuleiro para a passagem do comboio a 155 km/h.....	5.18
Figura 5.23 – Aceleração vertical: a) quarto de vão; b) meio vão	5.19
Figura 5.24 – Valores máximos da aceleração vertical: a) quarto de vão; b) meio vão.....	5.19
Figura 5.25 – Aceleração vertical: a) primeira carruagem; b) última carruagem	5.21
Figura 5.26 – Valores máximos da aceleração vertical: a) primeira carruagem; b) última carruagem	5.21

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA

Quadro 2.1 – Propriedades geométricas e mecânicas do sólido	2.48
Quadro 2.2 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga	2.50

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

Quadro 3.1 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga	3.6
Quadro 3.2 – Classificação de graus de liberdade	3.13
Quadro 3.3 – Propriedades das barras $B1$ a $B4$	3.24
Quadro 3.4 – Forças exteriores	3.24
Quadro 3.5 – Propriedades das barras $B1$ a $B5$	3.30
Quadro 3.6 – Forças exteriores	3.31
Quadro 3.7 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga	3.36

CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO NO PROGRAMA FEMIX

Quadro 4.1 – Bloco de dados relativo aos graus de liberdade prescritos de cada ponto	4.4
Quadro 4.2 – Resolução de um sistema de equações lineares recorrendo à biblioteca <i>cutil</i>	4.5
Quadro 4.3 – Armazenamento de todos os termos da matriz \underline{A}	4.6

Quadro 4.4 – Armazenamento em NCSB da matriz \underline{A}	4.8
Quadro 4.5 – Armazenamento esparsa da matriz \underline{A}	4.9
Quadro 4.6 – Bloco de dados associado aos parâmetros do método- α	4.13
Quadro 4.7 – Bloco de dados associado ao amortecimento de Rayleigh	4.14
Quadro 4.8 – Bloco de dados relativo às condições dinâmicas iniciais.....	4.15
Quadro 4.9 – Bloco de dados relativo aos parâmetros da combinação e casos de carga.....	4.16
Quadro 4.10 – Visualização dos intervalos de tempo e respectivos casos de carga	4.17
Quadro 4.11 – Bloco de dados correspondente às cargas concentradas	4.22
Quadro 4.12 – Bloco de dados relativo às combinações de casos de carga.....	4.23
Quadro 4.13 – Comboio Alfa pendular modelado como um conjunto de cargas móveis.....	4.24
Quadro 4.14 – Ficheiro de dados relativo ao percurso das cargas móveis	4.25
Quadro 4.15 – Bloco de dados relativo aos pontos de contacto do veículo.....	4.28
Quadro 4.16 – Bloco de dados associado ao contacto entre dois pontos nodais	4.29
Quadro 4.17 – Bloco de dados associado ao contacto entre um ponto e um elemento.....	4.30

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA PONTE FERROVIÁRIA DE SÃO LOURENÇO

Quadro 5.1 – Propriedades geométricas e mecânicas do tabuleiro.....	5.9
Quadro 5.2 – Propriedades geométricas e mecânicas dos encabeçamentos do tabuleiro	5.9
Quadro 5.3 – Propriedades geométricas dos elementos do arco.....	5.11
Quadro 5.4 – Propriedades mecânicas dos elementos do arco	5.13
Quadro 5.5 – Propriedades mecânicas do teflon.....	5.14
Quadro 5.6 – Propriedades mecânicas da borracha	5.14

Quadro 5.7 – Propriedades geométricas do carril.....	5.14
Quadro 5.8 – Frequências naturais de vibração	5.18
Quadro 5.9 – Deslocamentos verticais máximos a um quarto e a meio vão	5.22
Quadro 5.10 – Tempos de execução das análises dinâmicas realizadas para a velocidade de 155 km/h.....	5.23

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Quadro 6.1 – Tempos de execução das análises dinâmicas realizadas para a velocidade de 155 km/h.....	6.3
---	-----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O sector dos transportes, em particular o da alta velocidade, afecta directa e indirectamente o desenvolvimento e prosperidade das sociedades. Um sistema de transportes eficiente contribui para a melhoria das condições económicas e sociais. As economias caracterizadas por uma maior mobilidade são geralmente as que apresentam um desenvolvimento mais sustentado.

Os comboios de alta velocidade são um meio de transporte de grande capacidade que apresenta importantes vantagens em termos de segurança, baixo consumo de energia e reduzida poluição atmosférica, comparativamente com outros tipos de transporte (ver Figura 1.1).

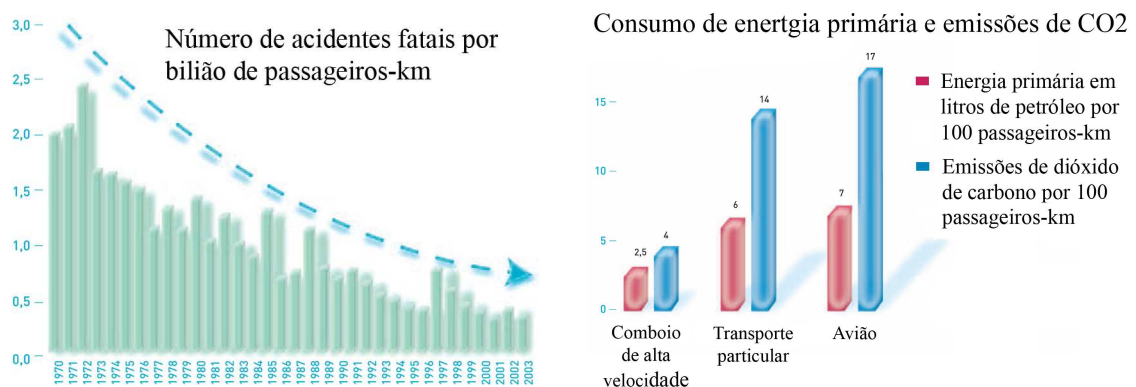


Figura 1.1 – Segurança, consumo de energia e emissões de CO2 (adaptado de UIC, 2005).

De acordo com UIC (2005), o transporte de alta velocidade japonês *Shinkansen* transportou cerca de quatro bilhões de passageiros desde 1964, sem qualquer acidente fatal. A linha *Tokaido Shinkansen* foi a primeira linha de alta velocidade a ser construída e apresenta o maior fluxo diário de passageiros a nível mundial, transportando em média 360 mil passageiros por dia.

A rede ferroviária de alta velocidade tem-se expandido por toda a Europa Ocidental, compreendendo países como a França, Alemanha, Itália, Espanha, Bélgica e Reino Unido. Na Figura 1.2 apresenta-se a actual rede europeia de alta velocidade.

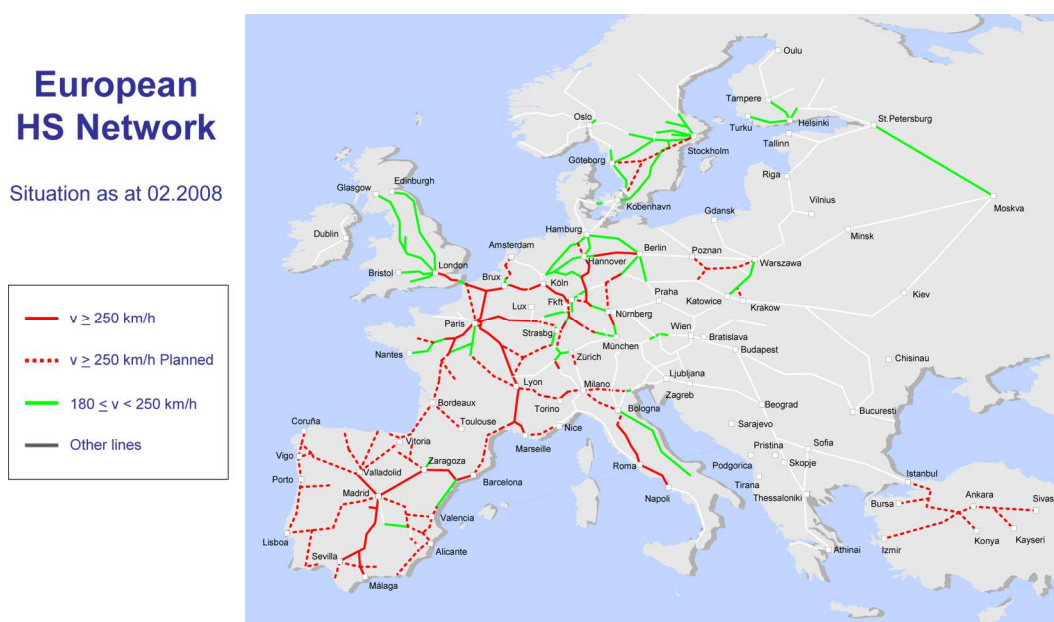


Figura 1.2 – Actual rede europeia de alta velocidade (UIC, 2008).

Em Portugal, está prevista a implementação, num futuro próximo, de uma rede ferroviária de alta velocidade. No âmbito da XXI Cimeira Luso-Espanhola foi reafirmado o interesse de Portugal e Espanha em concretizar as seguintes ligações: Porto-Vigo, Lisboa-Madrid, Aveiro-Salamanca e Faro-Huelva. Para além destas ligações, está ainda prevista a ligação Lisboa-Porto.

Nas pontes ferroviárias em linhas de alta velocidade os efeitos dinâmicos tendem a aumentar de forma considerável como resultado dos efeitos de ressonância. O conhecimento destes efeitos dinâmicos é da maior importância pelos seguintes motivos: i) vibrações excessivas da estrutura podem conduzir a um agravamento dos fenómenos de fadiga; ii) as deformações e acelerações da ponte devem ser controladas dentro de determinados valores limite por forma a que seja assegurada, em qualquer instante, a

estabilidade da via e do contacto roda-carril; iii) as acelerações nos veículos deverão ser limitadas por forma a garantir o conforto dos passageiros.

O comportamento dinâmico de uma ponte sujeita à passagem de um comboio pode ser analisado com ou sem a consideração da interacção entre as duas estruturas. Nos casos em que a interacção não influencie significativamente a resposta dinâmica da ponte, as acções do comboio podem ser simuladas com um conjunto de cargas móveis. Nos outros casos, nomeadamente nas vias de alta velocidade, para avaliar de forma mais precisa o referido comportamento dinâmico ou para analisar a resposta dinâmica do comboio, é necessário modelar este último tendo em atenção as suas características dinâmicas e considerar a interacção existente entre as duas estruturas.

Para avaliar a resposta dinâmica do sistema ponte-comboio é necessário dispor de ferramentas de análise numérica que permitam traduzir de uma forma realista a complexidade do sistema, sem que isso provoque uma grande morosidade nos cálculos efectuados.

1.2 INVESTIGAÇÕES ANTERIORES

Os efeitos dinâmicos em vias de alta velocidade têm sido alvo de estudo por parte de diversos investigadores. Frýba (2005) refere as elevadas amplificações dinâmicas verificadas em pontes ferroviárias como resultado dos fenómenos de ressonância devidos ao aumento das velocidades de circulação. Nos últimos anos, as velocidades no transporte comercial de passageiros aumentaram sensivelmente 100 km/h em cada década, atingindo hoje valores da ordem dos 350 km/h.

Calçada (1995) e Delgado & Santos (1997) desenvolveram uma formulação para analisar a interacção veículo-estrutura, que foi implementada numa versão anterior do programa FEMIX (Azevedo *et al.*, 2003). Este método é baseado nos seguintes pressupostos:

- 1) a interacção veículo-estrutura é considerada nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo;
- 2) o contacto entre os pontos do veículo e da estrutura é sempre perfeito, o que implica que a força de interacção correspondente possa assumir valores

positivos ou negativos, não provocando deste modo um comportamento não linear do sistema.

O algoritmo desenvolvido é muito versátil dado que permite modelar qualquer tipo de estrutura e veículo com elementos finitos de viga 3D. No entanto, a compatibilização dos deslocamentos nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo é efectuada por intermédio de um processo iterativo, o que pode tornar o processo de cálculo menos eficiente.

Yau *et al.* (1999) estudaram o conforto dos passageiros com base na aceleração vertical máxima do veículo. Concluíram que as irregularidades verticais da via, a rigidez do balastro e a rigidez e amortecimento das suspensões do veículo podem afectar de forma significativa o conforto dos passageiros. Referem também que o dimensionamento de vias de alta velocidade é, na maioria dos casos, condicionado pelo nível de conforto dos passageiros e não por estados limites últimos da estrutura.

Yang & Wu (2001) desenvolveram um elemento finito que considera a interacção veículo-estrutura. Este elemento permite obter, para cada instante, a resposta dinâmica do veículo, as forças de contacto e a resposta da estrutura sem recorrer a um processo iterativo. No entanto, como as matrizes de massa, amortecimento e rigidez dependem do tempo, têm de ser actualizadas em cada intervalo de tempo, o que pode diminuir significativamente a eficiência da resolução do sistema de equações lineares.

Lou (2005) desenvolveu uma formulação para analisar o sistema veículo-estrutura que considera os efeitos da rotação do veículo na direcção longitudinal. Este autor concluiu que a consideração da inércia de rotação do veículo tem pouca influência na resposta da estrutura mas tem grande influência na resposta do veículo. Esta influência aumenta quando são consideradas as irregularidades da via.

Kargarnovin *et al.* (2005) analisaram o nível de conforto dos passageiros com base no índice de conforto de Sperling e na aceleração máxima do veículo. Concluíram que, nos casos em que as irregularidades são desprezáveis, a aceleração máxima e o índice de conforto são independentes da velocidade para valores até os 150 km/h. Para velocidades superiores o índice de conforto varia linearmente com a velocidade.

Rigueiro *et al.* (2006) estudou a resposta dinâmica, em frequência, de pontes ferroviárias considerando a interacção veículo/via-férrea/ponte. Verificou que nas análises

dinâmicas com interacção veículo/via-férrea/ponte, a modelação da via-férrea não influencia as acelerações máximas da ponte quando ocorre ressonância da estrutura. No entanto, fora da zona de ressonância, as respostas da ponte correspondentes a análises realizadas com interacção são inferiores às obtidas nas análises em que a modelação da via-férrea não é considerada. Este fenómeno pode ser explicado pela distribuição dos efeitos do veículo pelos elementos que compõem a via-férrea, que ocorre para a passagem de comboios a baixas velocidades e para baixas vibrações da ponte. Para efectuar as análises com interacção veículo/via-férrea/ponte é utilizado o programa ADINA.

1.3 OBJECTIVOS E CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

A escolha do tema da presente dissertação resultou do interesse que o desenvolvimento de metodologias avançadas de análise dinâmica com interacção veículo-estrutura revela no âmbito da implementação de uma rede ferroviária de alta velocidade em Portugal.

O desenvolvimento de metodologias para a análise dinâmica do sistema veículo-estrutura constitui o principal objectivo da presente dissertação. Com este trabalho pretendeu-se também dar continuidade aos trabalhos de investigação iniciados há 12 anos, enquadrados no projecto PBIC/C/CEG/1331/92, que permitiu o desenvolvimento de ferramentas de análise numérica para o referido tipo de análises (Cruz, 1994; Calçada, 1995 e Delgado & Santos, 1997). No âmbito deste projecto, o algoritmo para analisar a interacção veículo-estrutura foi implementado na versão 2.1 do programa FEMIX (Azevedo *et al.*, 2003).

Numa primeira fase, procedeu-se a uma revisão das principais metodologias para a análise dinâmica de estruturas. Devido à grande complexidade dos problemas correntes no âmbito da Engenharia de Estruturas, foi necessário recorrer a metodologias de discretização espacial. O Método dos Elementos Finitos é claramente a metodologia mais utilizada na análise de estruturas, tendo sido adoptado na presente dissertação.

Posteriormente, foram abordados alguns métodos para a resolução da equação de equilíbrio dinâmico, nomeadamente o método de Newmark e o método- α . Estes métodos foram analisados em termos de estabilidade, precisão, dispersão e amortecimento algorítmico. Foi dada especial atenção ao amortecimento algorítmico dado que se reveste

de grande importância para eliminar participações espúrias relacionadas com as contribuições dos modos de vibração correspondentes a frequências elevadas.

Para analisar de forma eficiente e directa a interacção veículo-estrutura foi desenvolvida uma nova metodologia (Azevedo *et al.*, 2007) em que o processo de compatibilização dos deslocamentos nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo foi integrado na própria resolução do sistema de equações, em cada intervalo de tempo, eliminando assim a necessidade de um processo iterativo. Este algoritmo foi implementado numa versão actual do programa FEMIX (versão 4.0).

O programa FEMIX 4.0 foi desenvolvido de raiz e concebido de forma a que a implementação de novos tipos de elementos finitos e modelos de análise fosse simples e eficiente, permitindo ao mesmo tempo, a análise de problemas com um elevado grau de complexidade. Numa fase inicial foi implementada a análise dinâmica e posteriormente os algoritmos destinados à modelação das cargas móveis e da interacção veículo-estrutura.

A presente dissertação foi estruturada de acordo com os objectivos enunciados anteriormente, tendo sido o respectivo texto organizado em seis capítulos. É efectuada, em seguida, uma descrição sumária de cada um desses capítulos.

No Capítulo 2 apresenta-se os principais fundamentos e conceitos do Método dos Elementos Finitos. As equações de equilíbrio dinâmico são estabelecidas em forma espacialmente discreta, com recurso ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). No âmbito dos problemas abordados na presente dissertação, considera-se que os métodos de integração directa, em particular o método de Newmark e o método- α , são os mais eficientes e precisos para resolver a equação de equilíbrio dinâmico. Especial atenção é dedicada à problemática do ruído numérico, tendo-se recorrido à dissipação algorítmica conferida pelo método- α e por uma matriz de amortecimento que é calculada com base nas matrizes de rigidez e de massa.

No Capítulo 3 apresentam-se algumas metodologias para modelar o sistema veículo-estrutura. Os efeitos dinâmicos de uma estrutura sujeita à passagem de um veículo podem ser analisados com ou sem a consideração da interacção entre os dois sistemas. Nos casos em que a interacção não influencia significativamente a resposta dinâmica da estrutura, as acções do veículo podem ser simuladas por um conjunto de cargas móveis. Nos outros casos, nomeadamente em vias de alta velocidade, para avaliar de forma exacta

os referidos efeitos dinâmicos ou para analisar a resposta dinâmica do veículo, é necessário proceder à sua modelação tendo em atenção as suas características dinâmicas e considerar a interacção existente entre os dois sistemas.

No Capítulo 4 descrevem-se as implementações efectuadas no programa FEMIX 4.0 (Azevedo *et al.*, 2003). O Método dos Elementos Finitos é usado para analisar uma grande diversidade de problemas no âmbito da Engenharia de Estruturas, existindo actualmente uma grande variedade de programas comerciais de cálculo automático que têm este método implementado, tais como: ANSYS, ROBOT Millennium e SAP, entre outros. No entanto, no domínio da investigação científica, o uso destes programas comerciais dificulta, ou mesmo impossibilita, a implementação de novas ideias ou modificação de alguns componentes, uma vez que na grande maioria dos programas não se tem acesso ao seu código e nem sempre é possível estabelecer uma colaboração próxima com as pessoas que estão ligadas ao desenvolvimento do seu código computacional. Por esses motivos, e tendo também em atenção o carácter inovador da metodologia associada ao método directo descrito no Capítulo 3, decidiu-se implementar a referida metodologia na versão 4.0 do programa de cálculo automático FEMIX.

No Capítulo 5 é apresentado um estudo do comportamento dinâmico da ponte ferroviária de São Lourenço, uma ponte metálica do tipo *bowstring* situada na Linha do Norte da REFER, num troço recentemente modernizado de modo a permitir a circulação de comboios Alfa pendulares, que podem atingir velocidades máximas de 220 km/h. A resposta dinâmica do sistema ponte-comboio é avaliada em termos de segurança estrutural, segurança de via e conforto dos passageiros.

Por último, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho desenvolvido, bem como as perspectivas relativas ao seu desenvolvimento futuro.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA

2.1 INTRODUÇÃO

Para estudar o comportamento dinâmico de um sistema existem dois tipos de abordagem: determinística e probabilística. No âmbito da presente dissertação apenas é considerada a abordagem determinística, em que se assume que a variação ao longo do tempo das acções exteriores, bem como as propriedades do sistema, se encontram completamente definidas. Numa abordagem probabilística é considerada a natureza aleatória das acções exteriores e as incertezas associadas às propriedades do sistema.

Os métodos de análise dinâmica podem ser considerados como uma extensão dos métodos tradicionais de análise estática, dado que são ambos baseados no conceito de equilíbrio de forças. Numa análise dinâmica é considerado o equilíbrio das forças de inércia, de amortecimento, elásticas e das acções exteriores, para cada instante de tempo, de acordo com o que se encontra exposto na secção 2.2.

Os problemas correntes no âmbito da Engenharia de Estruturas são de natureza contínua. No entanto, devido à sua grande complexidade, é necessário recorrer a metodologias de discretização espacial, como é o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF). A secção 2.3 é integralmente dedicada à apresentação dos principais fundamentos e conceitos associados ao MEF e ao estabelecimento das equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta, com recurso ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Nas estruturas correntes há diversos mecanismos que contribuem para o amortecimento das vibrações. Por esse motivo, e ao contrário do caso da rigidez e da massa, é difícil calcular o amortecimento com base nas propriedades geométricas e mecânicas dos

elementos estruturais. Deste modo, a matriz de amortecimento não é calculada com base no PTV, adoptando-se para esse efeito a formulação de Rayleigh (Clough & Penzien, 1993). Nesta secção também são apresentadas, com maior detalhe, as matrizes elementares de rigidez e de massa dos elementos sólidos tridimensionais (*bricks*) e dos elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli.

No âmbito dos problemas abordados na presente dissertação, considera-se que os métodos de integração directa, em particular o método de Newmark e o método- α , apresentam uma grande eficiência e precisão na resolução da equação de equilíbrio dinâmico. Na secção 2.4 apresentam-se os referidos métodos, sendo analisados em termos de estabilidade, precisão, dispersão e amortecimento algorítmico. O amortecimento algorítmico revela grande importância para eliminar as participações espúrias relacionadas com as contribuições dos modos de vibração correspondentes a frequências elevadas.

Apenas foi implementado o método- α no programa de cálculo automático FEMIX 4.0 (Azevedo *et al.*, 2003), dado que este se reduz ao método de Newmark para $\alpha = 0$. Na secção 2.5 analisa-se uma estrutura modelada com elementos sólidos 3D e uma outra modelada com elementos de viga 3D, devido ao facto de estes serem os elementos finitos abordados com maior detalhe no âmbito da presente dissertação. As estruturas referidas foram analisadas com os programas FEMIX 4.0 e ANSYS 11.0, tendo-se verificado que os resultados obtidos são praticamente coincidentes.

2.2 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

A equação de equilíbrio dinâmico de um sistema discreto traduz o equilíbrio de todas as forças associadas aos graus de liberdade do sistema. Existem quatro tipos de forças: forças de inércia ($\underline{F}_I(t)$), forças de amortecimento ($\underline{F}_D(t)$), forças elásticas ($\underline{F}_E(t)$) e forças exteriores ($\underline{F}(t)$). O equilíbrio dinâmico no instante t é estabelecido por

$$\underline{F}_I(t) + \underline{F}_D(t) + \underline{F}_E(t) = \underline{F}(t) \quad (2.1)$$

A resposta dinâmica de um sistema discreto é definida pelos vectores de deslocamentos ($\underline{u}(t)$), velocidades ($\underline{\dot{u}}(t)$) e acelerações ($\underline{\ddot{u}}(t)$). As forças referidas em (2.1) estão directamente relacionadas com os vectores de deslocamentos, velocidades e acelerações de acordo com as expressões

$$\underline{F}_I(t) = \underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) \quad (2.2)$$

$$\underline{F}_D(t) = \underline{C} \dot{\underline{u}}(t) \quad (2.3)$$

$$\underline{F}_E(t) = \underline{K} \underline{u}(t) \quad (2.4)$$

sendo \underline{M} a matriz de massa, \underline{C} a matriz de amortecimento e \underline{K} a matriz de rigidez. As referidas matrizes são quadradas e têm todas a mesma dimensão, que corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Na secção 2.3 são expostos os métodos utilizados para calcular cada uma das referidas matrizes. No âmbito da presente dissertação apenas se considera o amortecimento viscoso definido por (2.2). Neste tipo de amortecimento, a respectiva força tem uma intensidade proporcional à grandeza da velocidade e a mesma direcção do movimento, mas com sentido oposto (Paz, 1997).

Substituindo (2.2) a (2.4) em (2.1), obtém-se

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (2.5)$$

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Na generalidade dos casos, a análise do comportamento de um sistema complexo como um todo é uma tarefa difícil. Por esse motivo é necessário proceder à sua divisão em elementos mais simples, cujo comportamento esteja bem definido, procedendo-se posteriormente à sua assemblagem de modo a poder analisar o comportamento do sistema como um todo.

Os sistemas em que é possível obter um modelo adequado recorrendo a um número finito de elementos são designados discretos. Os sistemas em que é efectuada a sua divisão indefinidamente, sendo o modelo apenas definido por intermédio do conceito matemático de um infinitesimal, são designados contínuos. Nestes últimos, devido ao número infinito de elementos, só é possível determinar o seu comportamento recorrendo a soluções matemáticas, limitando assim a sua utilização a sistemas muito simples. Para superar esta limitação foram propostos diversos métodos de discretização (Zienkiewicz & Taylor,

1994). Todos esses métodos envolvem uma aproximação que, em princípio, será tanto mais rigorosa quanto maior for o número de elementos envolvidos na discretização.

A metodologia de discretização espacial adoptada na presente dissertação, e que é usada na generalidade das análises de problemas estruturais, baseia-se no Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.3.1 Fundamentos do MEF

A formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que seja possível substituir o integral sobre um domínio complexo, de volume V , por um somatório de integrais estendidos a subdomínios de geometria simples, de volume V_i (Azevedo, 2003). Esse requisito encontra-se exemplificado por (2.6), que corresponde ao integral de volume de uma função f .

$$\int_V f \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f \, dV \quad (2.6)$$

Em (2.6) admite-se que

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (2.7)$$

No caso da aplicação do MEF à análise de estruturas, uma das formulações mais intuitivas é a que se baseia no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), sendo a única abordada nesta dissertação.

O MEF tem como princípio base a decomposição da estrutura num número finito de volumes do contínuo (os elementos finitos), para os quais se assume um conjunto de funções que definem de forma única o campo de deslocamentos no interior de cada elemento finito (Zienkiewicz & Taylor, 1994). O campo de deslocamentos assumido é definido por

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (2.8)$$

sendo \underline{N} a matriz das funções de forma e \underline{a} o vector de deslocamentos nodais (Azevedo, 2003).

Consequentemente, os campos de velocidades e de acelerações são definidos por

$$\underline{\dot{u}} = \underline{N} \underline{\dot{a}} \quad (2.9)$$

$$\underline{\ddot{u}} = \underline{N} \underline{\ddot{a}} \quad (2.10)$$

2.3.2 Conceitos fundamentais da mecânica estrutural

Nesta secção é apresentado o caso geral tridimensional, em que o estado de tensão é caracterizado em pontos de um corpo que apresenta uma forma qualquer no espaço.

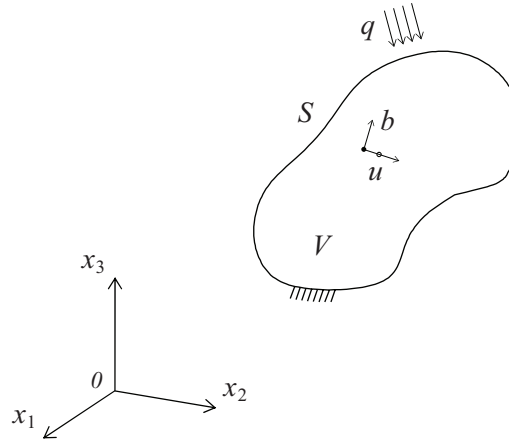


Figura 2.1 – Volume V sujeito a forças de volume e de superfície.

A Figura 2.1 representa um corpo arbitrário convenientemente ligado ao exterior, em que V é o volume do corpo e S a sua superfície exterior. Sendo t o tempo, para um ponto genérico de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , $\underline{b}(t, x_1, x_2, x_3)$ representa as forças aplicadas por unidade de volume, $\underline{q}(t, x_1, x_2, x_3)$ as forças aplicadas por unidade de superfície e $\underline{u}(t, x_1, x_2, x_3)$ o campo de deslocamentos. Para ter em conta os efeitos dinâmicos é necessário considerar os campos de velocidades $\underline{\dot{u}}(t, x_1, x_2, x_3)$ e de acelerações $\underline{\ddot{u}}(t, x_1, x_2, x_3)$. Para simplificar a escrita das expressões adiante apresentadas considera-se como implícita a dependência em relação ao tempo e às coordenadas (x_1, x_2, x_3) de todas as variáveis, pelo que se passa a omitir a sua menção explícita na notação utilizada, excepto se por razões de clareza de exposição tal for necessário.

O campo de deslocamentos é definido por

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

O tensor de tensões $\underline{\sigma}$ caracteriza o estado de tensão em qualquer ponto do corpo. Com base neste tensor de segunda ordem, a tensão \underline{t} num dado ponto do corpo e para um elemento de superfície de normal \underline{n} é definida por

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n} \quad (2.12)$$

Esta expressão representa as equações de equilíbrio definido (Azevedo, 1996a).

Devido às equações de reciprocidade de Maxwell é possível concluir que o tensor de tensões é sempre simétrico, sendo representado por

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

No âmbito da presente dissertação considera-se que o corpo apenas está sujeito a pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais. Deste modo, o campo de deformações $\underline{\varepsilon}$ de um ponto genérico pode ser definido como um gradiente simétrico do campo de deslocamentos (Correia de Araújo, 1961 e Faria, 1994), representado por

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \nabla) \quad (2.14)$$

em que \otimes representa o produto tensorial expandido (ou produto Kroneckeriano) e ∇ é definido por

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

O campo de deformações passa a ser constituído por seis componentes independentes, sendo representado por

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

2.3.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere-se o corpo representado na Figura 2.1 sujeito a um conjunto de forças de superfície e de volume. Com base no seu estado de equilíbrio, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de deslocamentos muito pequenos e compatíveis com as condições fronteira, que se designam por deslocamentos virtuais. O PTV estabelece que num sistema em equilíbrio sujeito a deslocamentos virtuais, o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo (Clough & Penzien, 1993).

$$\delta W_I = \delta W_E \quad (2.17)$$

O trabalho virtual interno é realizado pelas tensões internas nas deformações virtuais do corpo e o trabalho virtual externo é realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais. O PTV para um sistema em equilíbrio é definido por (Zienkiewicz & Taylor, 1994)

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_V \delta \underline{u}^T \underline{b} dV + \int_S \delta \underline{u}^T \underline{q} dS \quad (2.18)$$

Para ter em conta os efeitos dinâmicos é necessário acrescentar ao vector \underline{b} as forças de inércia. As características exactas de amortecimento dos sistemas estruturais correntes são muito complexas e de difícil definição (Clough & Penzien, 1993), pois na prática torna-se muito difícil quantificar de forma fiável o amortecimento correspondente a cada elemento do sistema estrutural. Por este motivo as forças de amortecimento não são consideradas nesta formulação, sendo alguns dos procedimentos existentes para a sua determinação expostos na secção 2.3.5.

As forças de inércia por unidade de volume de um elemento infinitesimal sujeito a um campo de acelerações $\underline{\ddot{u}}$ são definidas por

$$-\rho \underline{\ddot{u}} dV \quad (2.19)$$

sendo ρ a massa específica do material. Incluindo (2.19) em (2.18) chega-se a

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_V \delta \underline{u}^T (\underline{b} - \rho \underline{\ddot{u}}) dV + \int_S \delta \underline{u}^T \underline{q} dS \quad (2.20)$$

2.3.4 Equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta

De acordo com o que se encontra exposto por Zienkiewicz & Taylor (1994), o PTV (2.20) é aplicado a cada elemento finito de volume V_e e superfície externa S_e , resultando

$$\int_{V_e} \rho \delta \underline{u}^T \underline{\ddot{u}} dV + \int_{V_e} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \delta \underline{u}^T \underline{b} dV + \int_{S_e} \delta \underline{u}^T \underline{q} dS \quad (2.21)$$

Substituindo (2.10) em (2.21), chega-se a

$$\int_{V_e} \rho \delta \underline{u}^T \underline{N} \underline{\ddot{a}} dV + \int_{V_e} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_{V_e} \delta \underline{u}^T \underline{b} dV + \int_{S_e} \delta \underline{u}^T \underline{q} dS \quad (2.22)$$

A equação (2.8) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (2.23)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{u}^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (2.24)$$

A relação entre o campo de deformações e os deslocamentos nodais é expressa por

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (2.25)$$

em que a matriz \underline{B} depende do tipo de elemento finito considerado (Bathe, 1996).

Quando esta equação se refere aos deslocamentos virtuais e correspondentes deformações virtuais, tem-se

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (2.26)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (2.27)$$

No caso de materiais idealmente lineares e elásticos, e assumindo estados de deformação e de tensão inicialmente nulos, a equação constitutiva é definida por

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (2.28)$$

sendo \underline{D} a matriz de elasticidade (Azevedo, 1996a).

Substituindo (2.25) em (2.28), obtém-se

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.24), (2.27) e (2.29) em (2.22), tem-se

$$\int_{V_e} \rho \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{N} \underline{\ddot{a}} dV + \int_{V_e} \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} dV = \int_{V_e} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_{S_e} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{q} dS \quad (2.30)$$

Atendendo a que os deslocamentos e acelerações nodais não dependem das variáveis x_1 , x_2 e x_3 , os vectores \underline{a} , $\underline{\ddot{a}}$ e $\delta \underline{a}^T$ podem passar para fora dos respectivos integrais, obtendo-se

$$\delta \underline{a}^T \int_{V_e} \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \underline{\ddot{a}} + \delta \underline{a}^T \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} = \delta \underline{a}^T \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{b} dV + \delta \underline{a}^T \int_{S_e} \underline{N}^T \underline{q} dS \quad (2.31)$$

De acordo com o PTV, a equação (2.31) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se que

$$\int_{V_e} \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \underline{\ddot{a}} + \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} = \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_{S_e} \underline{N}^T \underline{q} dS \quad (2.32)$$

Assim, as matrizes elementares de massa e rigidez são definidas por (Zienkiewicz & Taylor, 1994)

$$\underline{M}_e = \int_{V_e} \rho \underline{N}^T \underline{N} dV \quad (2.33)$$

$$\underline{K}_e = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (2.34)$$

e o vector elementar das forças nodais equivalentes à acção exterior por

$$\underline{F}_e = \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{b} dV + \int_{S_e} \underline{N}^T \underline{q} dS \quad (2.35)$$

As matrizes globais de massa e rigidez e o vector global das forças nodais equivalentes à acção exterior referidos em (2.5) obtêm-se por assemblagem das matrizes e vectores elementares (Bathe, 1996). Muitos dos integrais envolvidos no cálculo das matrizes e vectores elementares \underline{M}_e , \underline{K}_e e \underline{F}_e não são triviais, uma vez que a primitiva da função integranda pode não existir explicitamente ou revelar-se demasiado complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, que também recebem a designação de quadratura. No âmbito desta dissertação adopta-se a quadratura de Gauss, por ser a mais utilizada no âmbito do MEF (Azevedo, 2003). Para facilitar o recurso a esta técnica é efectuada para cada eixo i do referencial cartesiano a substituição de variável a seguir indicada, em que s_1 , s_2 e s_3 assumem valores no intervalo $[-1, 1]$.

$$x_i \rightarrow x_i(s_1, s_2, s_3) \quad (2.36)$$

Esta substituição de variável é explicada posteriormente de forma mais detalhada para cada tipo de elemento finito.

2.3.5 Amortecimento

Nas estruturas correntes, os mecanismos que conduzem ao amortecimento das vibrações são de natureza diversa (Chopra, 1995), sendo difícil de calcular os coeficientes da matriz de amortecimento com base nas dimensões dos elementos estruturais e nas propriedades de amortecimento dos seus materiais. Por esse motivo, a matriz de amortecimento é geralmente definida com base nos coeficientes de amortecimento modais da estrutura, sendo esses valores estimados a partir de ensaios experimentais realizados em estruturas semelhantes.

Uma forma simples de determinar a matriz global de amortecimento é de considerá-la proporcional à matriz global de massa ou à matriz global de rigidez (Clough & Penzien, 1993).

No caso do amortecimento proporcional à massa tem-se

$$\underline{C} = a_0 \underline{M} \quad (2.37)$$

Efectuando uma transformação modal de (2.37) obtém-se

$$C_n = a_0 M_n \quad (2.38)$$

em que C_n e M_n correspondem ao amortecimento e massa generalizados referentes ao n -ésimo modo de vibração. O coeficiente de amortecimento modal é definido por

$$\xi_n = \frac{a_0}{2 \omega_n} \quad (2.39)$$

sendo ω_n a frequência angular correspondente ao n -ésimo modo de vibração e ξ_n o respectivo coeficiente de amortecimento. De acordo com (2.39), o coeficiente de amortecimento é inversamente proporcional à frequência angular (ver Figura 2.2).

De um modo semelhante, no caso do amortecimento proporcional à rigidez tem-se

$$\underline{C} = a_1 \underline{K} \quad (2.40)$$

Efectuando uma transformação modal de (2.40) chega-se a

$$C_n = a_1 K_n \quad (2.41)$$

em que K_n corresponde à rigidez generalizada referente ao n -ésimo modo de vibração, sendo definida por

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (2.42)$$

Substituindo (2.42) em (2.41), tem-se

$$C_n = a_1 \omega_n^2 M_n \quad (2.43)$$

O coeficiente de amortecimento modal é definido por

$$\xi_n = \frac{a_1 \omega_n}{2} \quad (2.44)$$

sendo linearmente proporcional à frequência angular (ver Figura 2.2).

Os coeficientes de amortecimento definidos por (2.39) e (2.44) não são apropriados para analisar sistemas com múltiplos graus de liberdade uma vez que a variação do coeficiente de amortecimento com a frequência angular não traduz o comportamento das estruturas correntes, onde o intervalo referente aos modos de vibração mais significativos apresenta coeficientes de amortecimento semelhantes. Para ultrapassar esta limitação é adoptada a formulação de Rayleigh (Clough & Penzien, 1993), em que se considera que a matriz global de amortecimento é proporcional a uma combinação das matrizes globais de massa e rigidez, sendo traduzida pelo somatório de (2.37) e (2.40), i.e.

$$\underline{C} = a_0 \underline{M} + a_1 \underline{K} \quad (2.45)$$

Por analogia com (2.37), (2.39), (2.40) e (2.44), tem-se

$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (2.46)$$

A relação entre o coeficiente de amortecimento e a frequência angular encontra-se representada na Figura 2.2.

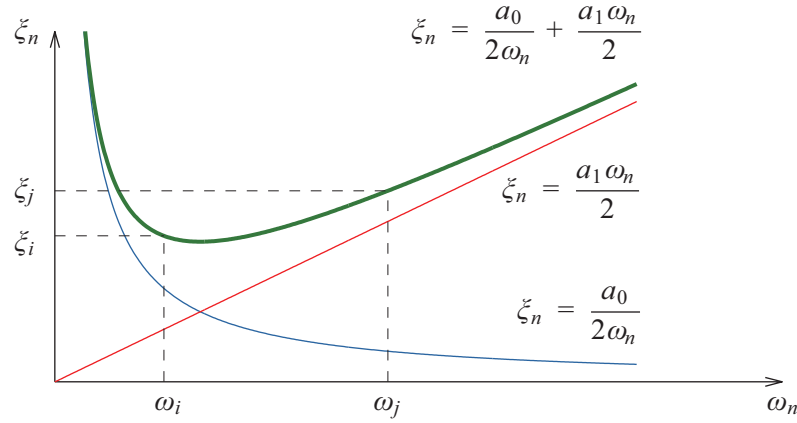


Figura 2.2 – Relação entre o coeficiente de amortecimento e a frequência angular.

Aplicando (2.46) a dois modos de vibração distintos obtém-se (Clough & Penzien, 1993)

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \begin{bmatrix} \omega_j & -\omega_i \\ -\frac{1}{\omega_j} & \frac{1}{\omega_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

em que ω_i e ω_j são as frequências angulares correspondentes aos i -ésimo e j -ésimo modos de vibração da estrutura, respectivamente, e ξ_i e ξ_j os coeficientes de amortecimento correspondentes.

A matriz de amortecimento definida por (2.45) é adequada para modelar estruturas onde o mecanismo de amortecimento se encontra distribuído de forma praticamente uniforme ao longo de toda a estrutura. No entanto, para estruturas constituídas por subestruturas que apresentem propriedades de amortecimento diferentes convém definir a matriz de amortecimento para cada subestrutura s , i.e.

$$\underline{C}_s = a_{0s} \underline{M} + a_{1s} \underline{K} \quad (2.48)$$

em que a_{0s} e a_{1s} são calculados para cada subestrutura de acordo com (2.47).

A matriz global de amortecimento é obtida por assemblagem das matrizes de amortecimento referentes às diversas subestruturas, sendo de um modo geral, não proporcional à combinação das matrizes globais de massa e rigidez.

2.3.6 Sólido tridimensional

No desenvolvimento do elemento sólido tridimensional (*brick*) é considerada uma formulação genérica com três deslocamentos segundo os eixos x_1 , x_2 e x_3 , em cada ponto nodal (Azevedo, 2003). Na Figura 2.3 encontra-se representado um elemento de oito nós com geometria arbitrária.

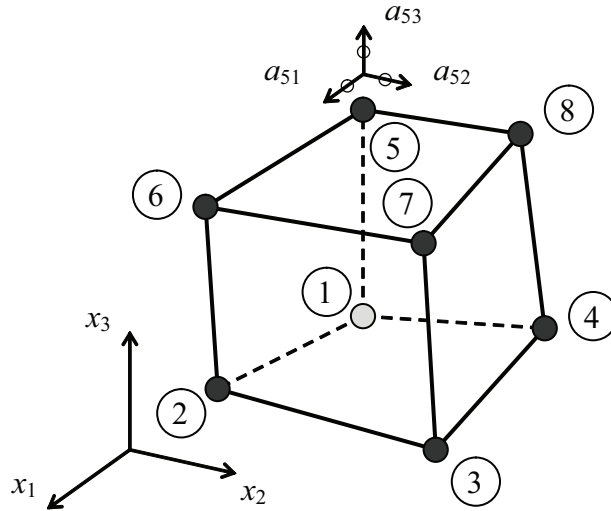


Figura 2.3 – Elemento sólido tridimensional de oito nós com geometria arbitrária.

No referencial geral, a matriz das coordenadas cartesianas dos nós do elemento finito é expressa por

$$\bar{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{81} & \bar{x}_{82} & \bar{x}_{83} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

No caso do elemento sólido tridimensional a substituição de variáveis referida em (2.36) é definida por

$$\begin{cases} x_1 & \rightarrow & x_1(s_1, s_2, s_3) \\ x_2 & \rightarrow & x_2(s_1, s_2, s_3) \\ x_3 & \rightarrow & x_3(s_1, s_2, s_3) \end{cases} \quad (2.50)$$

em que s_1 , s_2 e s_3 assumem valores no intervalo $[-1, 1]$.

A interpolação das coordenadas cartesianas é realizada por intermédio da seguinte expressão

$$\underline{x} = \underline{\bar{x}}^T \underline{N}_v \quad (2.51)$$

em que \underline{x} são as coordenadas cartesianas de um ponto genérico do elemento finito e \underline{N}_v é o vector das funções de forma, definido por

$$\underline{N}_v = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_8 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

sendo

$$N_1(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8} (1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) \quad (2.53)$$

$$N_2(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8} (1 + s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) \quad (2.54)$$

$$N_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8} (1 + s_1)(1 + s_2)(1 - s_3) \quad (2.55)$$

$$N_4(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8} (1 - s_1)(1 + s_2)(1 - s_3) \quad (2.56)$$

$$N_5(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8} (1 - s_1)(1 - s_2)(1 + s_3) \quad (2.57)$$

$$N_6(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8}(1+s_1)(1-s_2)(1+s_3) \quad (2.58)$$

$$N_7(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8}(1+s_1)(1+s_2)(1+s_3) \quad (2.59)$$

$$N_8(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{8}(1-s_1)(1+s_2)(1+s_3) \quad (2.60)$$

As funções de forma adoptadas para a interpolação das coordenadas cartesianas coincidem com as funções de forma assumidas para o campo de deslocamentos. Por esse motivo, a formulação considerada para o elemento sólido tridimensional é isoparamétrica.

O campo de deslocamentos (2.11) passa a ser

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{81} \\ a_{82} \\ a_{83} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Após a substituição de variáveis definida por (2.51), os integrais (2.33) e (2.34) passam a ser (Azevedo, 2003)

$$\underline{M}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \underline{N}^T \underline{N} J ds_1 ds_2 ds_3 \quad (2.62)$$

$$\underline{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} J ds_1 ds_2 ds_3 \quad (2.63)$$

em que J é o determinante da matriz Jacobiana \underline{J} definida por

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

A matriz \underline{D} referida em (2.63) é definida por Azevedo (2003). A matriz \underline{B} que define a relação entre o campo de deformações e os deslocamentos nodais é expressa por

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

No caso do elemento sólido tridimensional, as matrizes de massa e rigidez elementares não são definidas explicitamente, sendo as expressões apresentadas nesta secção implementadas em programas de cálculo automático (Azevedo *et al.*, 2003).

2.3.7 Viga tridimensional

É adoptada a formulação do elemento finito de viga de Euler-Bernoulli, em que se considera que as secções se mantêm planas e normais ao eixo do elemento após a deformação. Deste modo não são consideradas as deformações devidas às tensões tangenciais, i.e., as distorções são consideradas nulas.

O elemento de viga tridimensional considerado tem seis deslocamentos em cada ponto nodal: três de translação (v) segundo os eixos x_1 , x_2 e x_3 , e três de rotação (w) em torno destes eixos. Designa-se por deslocamentos generalizados o agrupamento de

deslocamentos e de rotações. De igual modo, designa-se por forças generalizadas o agrupamento de forças e de momentos. Na Figura 2.4 encontra-se representada uma barra prismática de eixo rectilíneo com dois nós (i e j) e comprimento L . Em cada nó são considerados seis graus de liberdade em correspondência com os seis deslocamentos generalizados.

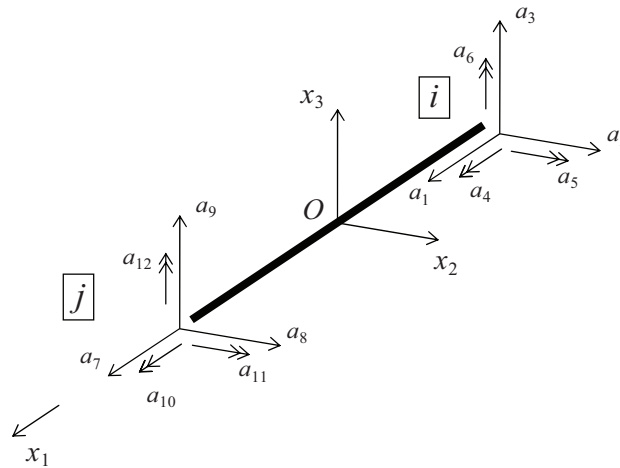


Figura 2.4 – Graus de liberdade da barra ij no referencial local.

Na Figura 2.5 encontra-se representada a barra ij no plano (x_1, x_3) .

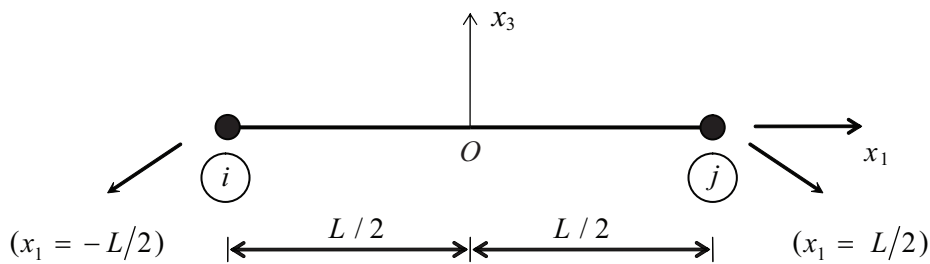


Figura 2.5 – Barra ij no plano (x_1, x_3) .

A substituição de variável referida em (2.36) é efectuada recorrendo à seguinte expressão

$$x_1 = \frac{L}{2} s \quad (2.66)$$

em que s assume valores no intervalo $[-1, 1]$.

O campo de deslocamentos generalizados para um ponto definido pela coordenada s , pertencente ao eixo do elemento de viga, é expresso por (Calçada, 1995 e Azevedo, 2003)

$$\begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \\ w_1(s) \\ w_2(s) \\ w_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & -N_3 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & -N_6 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & -N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & -N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

em que

$$N_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s \quad (2.68)$$

$$N_2(s) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} s + \frac{1}{4} s^3 \quad (2.69)$$

$$N_3(s) = \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} s + \frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} s^3 \right) \quad (2.70)$$

$$N_4(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s \quad (2.71)$$

$$N_5(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} s - \frac{1}{4} s^3 \quad (2.72)$$

$$N_6(s) = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} s - \frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} s^3 \right) \quad (2.73)$$

$$N_7(s) = \frac{2}{L} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} s^2 \right) \quad (2.74)$$

$$N_8(s) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}s + \frac{3}{4}s^2 \quad (2.75)$$

$$N_9(s) = \frac{2}{L} \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}s^2 \right) \quad (2.76)$$

$$N_{10}(s) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{3}{4}s^2 \quad (2.77)$$

Na Figura 2.6 encontram-se representadas as rotações da secção transversal segundo os eixos x_1 , x_2 e x_3 . O ponto O é um ponto qualquer pertencente à secção.

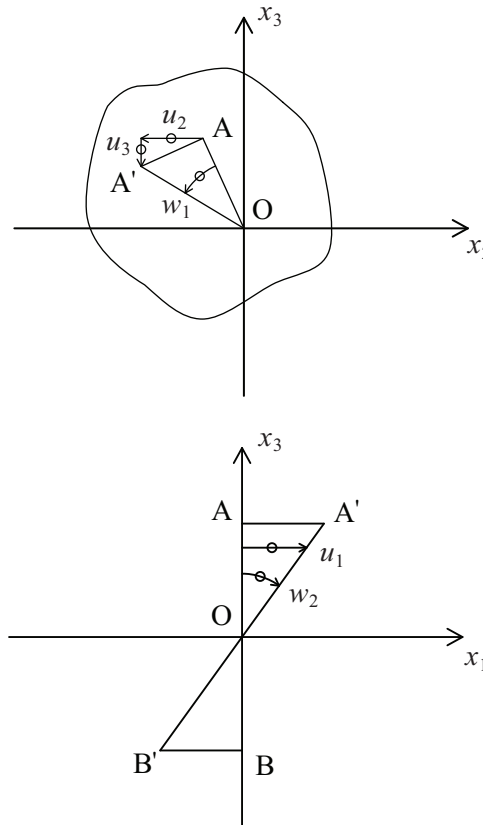


Figura 2.6 – Rotações da secção transversal.

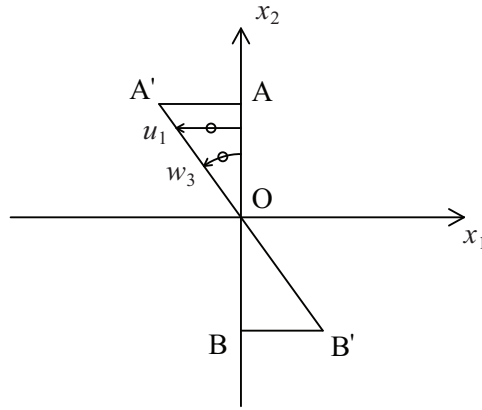


Figura 2.6 (continuação) – Rotações da secção transversal.

Uma vez que os deslocamentos são muito pequenos, considera-se que

$$\tan w_1 \cong w_1$$

$$\tan w_2 \cong w_2 \quad (2.78)$$

$$\tan w_3 \cong w_3$$

O campo de deslocamentos (2.11) refere-se a um ponto genérico de coordenadas (s, x_2, x_3) , pertencente ao elemento de viga. O campo de deslocamentos generalizados definido por (2.67) refere-se a um ponto pertencente ao eixo do elemento finito, definido pela coordenada s . A relação entre estes dois campos de deslocamentos é

$$\begin{bmatrix} u_1(s, x_2, x_3) \\ u_2(s, x_2, x_3) \\ u_3(s, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(s) + w_2(s) x_3 - w_3(s) x_2 \\ v_2(s) - w_1(s) x_3 \\ v_3(s) + w_1(s) x_2 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

ou

$$\underline{u}(s, x_2, x_3) = \underline{N} \underline{a} \quad (2.80)$$

sendo

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_7 x_2 & N_7 x_3 & 0 & N_8 x_3 & -N_8 x_2 & N_4 & N_9 x_2 & N_9 x_3 & 0 & N_{10} x_3 & -N_{10} x_2 \\ 0 & N_2 & 0 & -N_1 x_3 & 0 & -N_3 & 0 & N_5 & 0 & -N_4 x_3 & 0 & -N_6 \\ 0 & 0 & N_2 & N_1 x_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_5 & N_4 x_2 & N_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Após a substituição de variáveis definida em (2.66), o integral (2.33) passa a ser (Azevedo, 2003)

$$\underline{M}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{S_e} \rho \underline{N}^T \underline{N} J dS ds \quad (2.82)$$

em que J é o Jacobiano associado à transformação de coordenadas, sendo definido por

$$J = \frac{dx_1}{ds} = \frac{L}{2} \quad (2.83)$$

As expressões apresentadas nesta secção para o cálculo da matriz elementar de massa podem ser implementadas em programas de cálculo automático, permitindo assim obter um elemento de viga tridimensional mais genérico do que o que seria obtido através da formulação clássica (Paz, 1997). Na dedução da matriz de massa clássica do elemento de viga de Euler-Bernoulli apenas são consideradas as forças de inércia associadas a acelerações de translação segundo os eixos x_1 , x_2 e x_3 e as associadas a acelerações de rotação em torno do eixo x_1 . Archer (1965) analisou os efeitos relacionados com os momentos de inércia de massa relativamente aos eixos x_2 e x_3 e propôs termos adicionais para a matriz de massa. A formulação referida anteriormente permite incluir directamente os termos adicionais da matriz de massa propostos por Archer (1965).

Para se calcular os integrais definidos em (2.82) recorre-se a técnicas de integração numérica (Cook *et al.*, 1989 e Azevedo, 2003). Para deduzir a expressão da matriz elementar de massa definida por (2.84), assume-se que x_2 e x_3 são eixos principais centrais de inércia e que as grandezas a seguir indicadas são constantes ao longo do eixo x_1 (ver Figura 2.4).

- A – área da secção transversal da barra;
- I_2 – momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo x_2 ;
- I_3 – momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo x_3 ;
- I_0 – momento polar de inércia da secção transversal da barra relativamente à origem (O) do referencial (Beer *et al.*, 2004);
- ρ – massa específica.

$$\underline{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\bar{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\bar{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}\bar{m}L + \frac{6}{5}\frac{\rho I_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{210}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{420}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_3 \\ 0 & 0 & \frac{13}{35}\bar{m}L + \frac{6}{5}\frac{\rho I_2}{L} & 0 & -\frac{11}{210}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & \frac{9}{70}\bar{m}L - \frac{6}{5}\frac{\rho I_2}{L} & 0 & \frac{13}{420}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho I_0L & 0 & \frac{1}{3}\rho I_0L & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho I_0L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{210}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & \frac{1}{105}\bar{m}L^3 + \frac{2}{15}\rho I_2L & 0 & -\frac{13}{420}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & -\frac{1}{140}\bar{m}L^3 - \frac{1}{30}\rho I_2L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{210}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{105}\bar{m}L^3 + \frac{2}{15}\rho I_3L & \frac{13}{420}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{140}\bar{m}L^3 - \frac{1}{30}\rho I_3L \\ \frac{1}{6}\bar{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\bar{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}\bar{m}L - \frac{6}{5}\frac{\rho I_3}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{420}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{210}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{70}\bar{m}L - \frac{6}{5}\frac{\rho I_2}{L} & 0 & -\frac{13}{420}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & \frac{13}{35}\bar{m}L + \frac{6}{5}\frac{\rho I_2}{L} & 0 & \frac{11}{210}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho I_0L & 0 & \frac{1}{6}\rho I_0L & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho I_0L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{420}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & -\frac{1}{140}\bar{m}L^3 - \frac{1}{30}\rho I_2L & 0 & \frac{11}{210}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_2 & 0 & \frac{1}{105}\bar{m}L^3 + \frac{2}{15}\rho I_2L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{420}\bar{m}L^2 + \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{140}\bar{m}L^3 - \frac{1}{30}\rho I_3L & 0 & -\frac{11}{210}\bar{m}L^2 - \frac{1}{10}\rho I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{105}\bar{m}L^3 + \frac{2}{15}\rho I_3L \end{bmatrix}$$

(2.84)

em que \bar{m} é a massa por unidade de comprimento.

Aplicando a (2.34) a substituição de variável referida em (2.66), tem-se (Azevedo, 2003)

$$\underline{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{s_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} J dS ds \quad (2.85)$$

Considera-se que as dimensões da secção transversal da barra, em comparação com o seu comprimento, são muito pequenas. Por esse motivo é possível desprezar o efeito das tensões normais σ_2 e σ_3 . A relação entre as tensões tangenciais e as distorções não é analisada na formulação desenvolvida nesta secção, sendo os termos de rigidez correspondentes à torção da barra definidos por Paz (1997). A equação constitutiva (2.28) fica reduzida a (Azevedo, 1996a)

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (2.86)$$

em que E é o módulo de Young.

O campo de deformações ε_1 é definido do seguinte modo

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.87)$$

Recorrendo à regra da cadeia obtém-se

$$\varepsilon_1 = \frac{ds}{dx_1} \frac{\partial u_1}{\partial s} \quad (2.88)$$

Substituindo (2.83) em (2.88), tem-se

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{J} \frac{\partial u_1}{\partial s} \quad (2.89)$$

Designando por L^1 o seguinte operador diferencial

$$L^1 = \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.90)$$

e recorrendo a $u_1 = \underline{N} \underline{a}$, a equação (2.89) escreve-se

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{J} L^1 \underline{N} \underline{a} \quad (2.91)$$

De acordo com (2.81) tem-se que

$$\underline{N} = [N_1 \ N_7 x_2 \ N_7 x_3 \ 0 \ N_8 x_3 \ -N_8 x_2 \ N_4 \ N_9 x_2 \ N_9 x_3 \ 0 \ N_{10} x_3 \ -N_{10} x_2] \quad (2.92)$$

Comparando (2.25) com (2.91), conclui-se que

$$\underline{B} = \frac{1}{J} L^1 \underline{N} \quad (2.93)$$

Como já foi referido para a matriz elementar de massa, as expressões apresentadas para o cálculo da matriz elementar de rigidez podem ser implementadas em programas de cálculo automático, permitindo assim obter um elemento de viga tridimensional mais genérico do que o que seria obtido através da formulação clássica (Paz, 1997). Para deduzir a expressão da matriz elementar de rigidez definida por (2.94), assume-se que x_2 e x_3 são eixos principais centrais de inércia e que as grandezas a seguir indicadas são constantes ao longo do eixo x_1 (ver Figura 2.4).

- A – área da secção transversal da barra;
- I_2 – momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo x_2 ;
- I_3 – momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo x_3 ;
- I_t – momento de inércia de torção da secção transversal da barra (Massonnet, 1968);
- E – módulo de Young;
- G – módulo de distorção (Azevedo, 1996a);

De acordo com (2.85) e com Paz (1997), e efectuando as substituições necessárias, conclui-se que

$$\begin{aligned}
 \underline{\bar{K}}_e = & \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 \\
 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{2EI_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.94}$$

2.4 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

Os métodos utilizados para a resolução da equação de equilíbrio dinâmico dividem-se em dois grandes grupos: analíticos, que permitem obter a solução exacta ao longo do tempo, e numéricos, que mediante uma discretização temporal verificam a

equação de equilíbrio dinâmico para sucessivos instantes de tempo. O método indicado para a resolução deste tipo de equação depende de diversos factores, como o número de graus de liberdade do sistema, o amortecimento, a consideração de não linearidades e a complexidade da acção exterior.

No caso de sistemas com poucos graus de liberdade é possível obter a solução exacta recorrendo a métodos analíticos. Por exemplo, Frýba (1999) analisou vários problemas clássicos relacionados com a passagem de uma carga móvel, ou de uma série de cargas móveis, sobre diversos tipos de sólidos e estruturas. Os métodos analíticos permitem uma boa compreensão dos princípios básicos que regem a resposta dinâmica do sistema. No entanto, a sua utilização torna-se demasiado complexa ou mesmo impraticável para sistemas com vários graus de liberdade, com comportamento não linear, com amortecimento complexo, ou sujeitos a solicitações que não podem ser caracterizadas por intermédio de funções analíticas, como é o caso de estruturas sujeitas a acções sísmicas. Assim sendo, no âmbito da presente dissertação apenas são abordados os métodos de integração numérica, uma vez que não apresentam quaisquer das desvantagens mencionadas anteriormente.

Os métodos geralmente utilizados para a integração numérica da equação de equilíbrio dinâmico dividem-se em dois grupos: métodos de sobreposição modal e métodos de integração directa.

Os métodos de sobreposição modal baseiam-se numa mudança de coordenadas do sistema de equações (2.5), denominada transformação modal, mediante a qual a solução do sistema passa a ser definida com base nos modos próprios de vibração (Chopra, 1995). Devido às condições de ortogonalidade dos respectivos modos em relação às matrizes de massa e rigidez, é possível proceder ao desacoplamento das equações diferenciais associadas a cada um dos modos de vibração. A resposta dinâmica pode ser determinada resolvendo separadamente cada uma destas equações e efectuando posteriormente a sua sobreposição para obter a resposta dinâmica em função das coordenadas iniciais. Os métodos de sobreposição modal não são abordados no âmbito da presente dissertação, uma vez que é difícil implementar as condições de interacção veículo-estrutura. A consideração da não-linearidade do sistema também se revela mais complexa e, apesar de o assunto não ser abordado no presente trabalho, será certamente objecto de estudo em futuros desenvolvimentos.

Nos métodos de integração directa não é efectuada qualquer transformação do sistema de equações que implique uma mudança de base antes de se proceder à sua integração numérica. Estes métodos podem ser classificados como métodos explícitos ou implícitos (Hughes, 2000). Os métodos explícitos permitem determinar a solução do sistema no instante $t + \Delta t$ estabelecendo as equações de equilíbrio dinâmico para o instante t . Se as matrizes de massa e de amortecimento forem diagonais, a solução do sistema de equações é obtida directamente, não sendo necessário recorrer a qualquer tipo de resolução do sistema de equações. No entanto, estes métodos são condicionalmente estáveis, sendo necessário considerar intervalos de tempo muito reduzidos para que os erros acumulados não se propaguem ao longo da integração numérica. Os métodos implícitos estabelecem o equilíbrio dinâmico para o instante $t + \Delta t$ para determinar a solução do sistema nesse mesmo instante, sendo por isso necessário proceder à resolução do sistema de equações. Este métodos apresentam como principal vantagem o facto de permitirem a obtenção de algoritmos incondicionalmente estáveis. Neste caso, o intervalo de tempo a utilizar é determinado exclusivamente em função da precisão desejada e não por condicionamentos de estabilidade, que são, em geral, mais restritivos.

O Teorema de Dahlquist permite retirar conclusões importantes, em termos de estabilidade, sobre a aplicação dos métodos de integração directa a sistemas de equações diferenciais lineares (Hughes, 2000 e Faria, 1994). Este teorema estabelece que:

- 1) não existem métodos explícitos incondicionalmente estáveis;
- 2) não existem métodos com precisão de terceira ordem, ou superior, incondicionalmente estáveis;
- 3) o método incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem que apresenta erro mínimo é o que se baseia na regra trapezoidal.

Segundo Hughes (2000), para um método de integração directa ser competitivo deverá apresentar as seguintes características:

- 1) ser incondicionalmente estável quando aplicado a problemas lineares;
- 2) em cada instante de integração, necessitar de resolver apenas um conjunto de equações implícitas;
- 3) ter precisão de segunda ordem;

- 4) dispor da capacidade de controlo da dissipação algorítmica nos modos de vibração com frequências elevadas;
- 5) ser auto-suficiente no início da integração.

De acordo com o Teorema de Dahlquist, para satisfazer a primeira condição é necessário que o método de integração seja implícito. Esta condição serve para prevenir que os erros acumulados não se propaguem ao longo da integração numérica ou que não seja necessário utilizar um intervalo de tempo demasiado restritivo.

A segunda condição deve-se ao facto de determinados algoritmos, que apresentam melhores características do ponto de vista numérico, necessitarem de sistemas implícitos de maior dimensão ou de pelo menos dois sistemas com a mesma dimensão do problema original, não sendo por isso largamente utilizados.

Segundo Hughes (2000), no âmbito da dinâmica estrutural os métodos com precisão de segunda ordem são consideravelmente superiores aos métodos com precisão de primeira ordem. Atendendo a que não existem métodos com precisão de terceira ordem, ou superior, incondicionalmente estáveis, justifica-se a existência da terceira condição.

A quarta condição revela-se muito importante para eliminar as participações espúrias relacionadas com as contribuições dos modos de vibração com frequências elevadas. Na generalidade das aplicações estruturais, a resposta dinâmica depende essencialmente das contribuições dos modos de vibração com frequências baixas. A norma EN 1990 - Annex A2 (2005) recomenda que, para o cálculo das acelerações verticais do tabuleiro de uma ponte, apenas sejam consideradas as contribuições dos modos de vibração com frequências até 30 Hz. No entanto, ao efectuar a integração directa das equações de equilíbrio dinâmico considera-se as contribuições de todos os modos de vibração. Como o intervalo de tempo considerado na análise é determinado com base nos modos de vibração com frequências baixas, as contribuições dos modos com frequências mais elevadas não são bem integradas, sendo por este motivo consideradas espúrias.

Por fim, a última condição justifica-se pelo facto de o comportamento global de algoritmos que não são auto-suficientes no início da integração ser de difícil avaliação. Além disso, este tipo de algoritmos poderá requerer uma implementação mais complexa e um maior esforço de cálculo.

Em face das razões anteriormente apresentadas, considera-se que os métodos de Newmark e de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) são os mais indicados para o tipo de análise pretendida, sendo os únicos abordados no âmbito da presente dissertação.

2.4.1 Método de Newmark

2.4.1.1 Expressões fundamentais

Como já foi referido anteriormente, trata-se de um método implícito e, mediante uma escolha criteriosa de parâmetros, incondicionalmente estável. Este método assume uma variação linear das acelerações, razão pela qual se integra na família de métodos trapezoidais generalizados. Deste modo, a velocidade e deslocamento no instante $t + \Delta t$ são expressos por (Clough & Penzien, 1993)

$$\dot{\underline{u}}^c = \dot{\underline{u}}^p + \left[(1 - \gamma) \ddot{\underline{u}}^p + \gamma \ddot{\underline{u}}^c \right] \Delta t \quad (2.95)$$

$$\underline{u}^c = \underline{u}^p + \dot{\underline{u}}^p \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\underline{u}}^p + \beta \ddot{\underline{u}}^c \right] \Delta t^2 \quad (2.96)$$

em que β e γ são parâmetros que permitem controlar a estabilidade e a precisão. O índice c (*current*) indica o instante corrente ($t + \Delta t$) e o índice p (*previous*) indica o instante anterior (t). O factor γ estabelece uma ponderação linear entre as acelerações no instante anterior e no instante corrente, tendo em vista a definição da velocidade (2.95). O factor β estabelece uma ponderação linear entre as acelerações no instante anterior e no instante corrente, tendo agora em vista a definição do deslocamento (2.96).

A equação de equilíbrio dinâmico para o instante $t + \Delta t$ é definida por (2.5), sendo

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}^c + \underline{C} \dot{\underline{u}}^c + \underline{K} \underline{u}^c = \underline{F}^c \quad (2.97)$$

Designando por \underline{u}_F os deslocamentos associados a graus de liberdade livres (*free*) e por \underline{u}_P os deslocamentos associados a graus de liberdade prescritos (*prescribed*), pode-se escrever a equação (2.97) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{FF} & \underline{M}_{FP} \\ \underline{M}_{PF} & \underline{M}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}}_F^c \\ \ddot{\underline{u}}_P^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{FF} & \underline{C}_{FP} \\ \underline{C}_{PF} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}_F^c \\ \dot{\underline{u}}_P^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{FF} & \underline{K}_{FP} \\ \underline{K}_{PF} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_F^c \\ \underline{u}_P^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_F^c \\ \underline{F}_P^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_P^c \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

representando \underline{R}_P as reacções de apoio. Desenvolvendo (2.98) obtém-se

$$\underline{M}_{FF} \ddot{\underline{u}}_F^c + \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^c + \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c = \underline{F}_F^c - \underline{M}_{FP} \ddot{\underline{u}}_P^c - \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^c - \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^c \quad (2.99)$$

$$\underline{R}_P^c = \underline{M}_{PF} \ddot{\underline{u}}_F^c + \underline{M}_{PP} \ddot{\underline{u}}_P^c + \underline{C}_{PF} \dot{\underline{u}}_F^c + \underline{C}_{PP} \dot{\underline{u}}_P^c + \underline{K}_{PF} \underline{u}_F^c + \underline{K}_{PP} \underline{u}_P^c - \underline{F}_P^c \quad (2.100)$$

De aqui em diante apenas é desenvolvida a equação (2.99), que é utilizada para calcular os valores da resposta dinâmica no instante corrente ($t + \Delta t$) e inclui uma ou mais variáveis relacionadas com esse mesmo instante. Para que os valores da resposta dinâmica correspondentes ao instante corrente ($t + \Delta t$) dependam apenas de valores associados ao instante anterior (t) e de \underline{u}_F^c , é necessário definir $\ddot{\underline{u}}_F^c$ e $\dot{\underline{u}}_F^c$ em função dessas grandezas.

Desenvolvendo (2.96) obtém-se

$$\underline{u}_F^c = \underline{u}_F^p + \dot{\underline{u}}_F^p \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t^2 + \beta \ddot{\underline{u}}_F^c \Delta t^2 \quad (2.101)$$

A equação (2.101) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\beta \ddot{\underline{u}}_F^c \Delta t^2 = \underline{u}_F^c - \underline{u}_F^p - \dot{\underline{u}}_F^p \Delta t - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t^2 \quad (2.102)$$

Dividindo todos os termos da equação (2.102) por $\beta \Delta t^2$ resulta

$$\ddot{\underline{u}}_F^c = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \quad (2.103)$$

Desenvolvendo (2.95) obtém-se

$$\dot{\underline{u}}_F^c = \dot{\underline{u}}_F^p + (1 - \gamma) \ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t + \gamma \ddot{\underline{u}}_F^c \Delta t \quad (2.104)$$

Substituindo (2.103) em (2.104), tem-se

$$\dot{\underline{u}}_F^c = \dot{\underline{u}}_F^p + (1-\gamma)\ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t + \gamma \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \Delta t \quad (2.105)$$

A equação (2.105) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\dot{\underline{u}}_F^c = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \dot{\underline{u}}_F^p \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \ddot{\underline{u}}_F^p \Delta t \left[1 - \gamma - \frac{\gamma}{2\beta} + \gamma \right] \quad (2.106)$$

que é equivalente a

$$\dot{\underline{u}}_F^c = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_F^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \quad (2.107)$$

Reescrevendo (2.99) vem

$$\underline{M}_{FF} \ddot{\underline{u}}_F^c + \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^c + \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c = \bar{\underline{F}}_F^c \quad (2.108)$$

sendo

$$\bar{\underline{F}}_F^c = \underline{F}_F^c - \underline{M}_{FP} \ddot{\underline{u}}_P^c - \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^c - \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^c \quad (2.109)$$

Substituindo (2.103) e (2.107) em (2.109), obtém-se

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{FF} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \\ & + \underline{C}_{FF} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_F^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] + \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c = \bar{\underline{F}}_F^c \end{aligned} \quad (2.110)$$

Colocando \underline{u}_F^c em evidência resulta

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M}_{FF} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{C}_{FF} + \underline{K}_{FF} \right) \underline{u}_F^c = \bar{\underline{F}}_F^c \\ & + \underline{M}_{FF} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \\ & + \underline{C}_{FF} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_F^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \end{aligned} \quad (2.111)$$

ou de um modo mais compacto

$$\bar{\underline{K}}_{FF} \underline{u}_F^c = \bar{\underline{F}}_F^c \quad (2.112)$$

com

$$\bar{\underline{K}}_{FF} = A_0 \underline{M}_{FF} + A_1 \underline{C}_{FF} + \underline{K}_{FF} \quad (2.113)$$

e

$$\bar{\underline{F}}_F^c = \underline{F}_F^c + \underline{M}_{FF} \left[A_0 \underline{u}_F^p + A_2 \dot{\underline{u}}_F^p + A_3 \ddot{\underline{u}}_F^p \right] + \underline{C}_{FF} \left[A_1 \underline{u}_F^p + A_4 \dot{\underline{u}}_F^p + A_5 \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \quad (2.114)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & A_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} & A_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} \\ A_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 & A_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1 & A_5 &= \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.115)$$

De acordo com Hughes (2000), a convergência é o principal requisito para qualquer algoritmo de integração directa. Se a estabilidade e consistência forem garantidas, a sua convergência está automaticamente assegurada. Para analisar as principais características do método de Newmark são efectuados os seguintes passos:

- 1) redução a um sistema com um grau de liberdade;
- 2) definição de uma condição de estabilidade que seja verificada em determinadas circunstâncias;
- 3) determinação do erro de truncatura local, que serve para obter a ordem de precisão do método;
- 4) utilização das duas condições anteriores para provar a convergência do algoritmo para um sistema com um grau de liberdade.

Considerando que o sistema se encontra em vibração livre não amortecida, a equação de equilíbrio dinâmico (2.97) para um sistema com um grau de liberdade é definida por

$$M \ddot{u}^c + K u^c = 0 \quad (2.116)$$

Esta simplificação é utilizada nas secções seguintes.

2.4.1.2 Matriz de amplificação

Segundo Hilber & Hughes (1978), é possível definir a resposta dinâmica no instante $t + \Delta t$ com base na resposta no instante t , de acordo com a expressão

$$\underline{X}^c = \underline{A} \underline{X}^p \quad (2.117)$$

sendo

$$\underline{X}^c = \begin{bmatrix} \underline{u}^c & \dot{\underline{u}}^c \Delta t & \ddot{\underline{u}}^c \Delta t^2 \end{bmatrix}^T \quad (2.118)$$

$$\underline{X}^p = \begin{bmatrix} \underline{u}^p & \dot{\underline{u}}^p \Delta t & \ddot{\underline{u}}^p \Delta t^2 \end{bmatrix}^T \quad (2.119)$$

Na equação (2.117) \underline{A} é a matriz de amplificação, sendo definida, no caso do método de Newmark, por

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 + \beta A_{31} & 1 + \beta A_{32} & \frac{1}{2} + \beta (A_{33} - 1) \\ \gamma A_{31} & 1 + \gamma A_{32} & 1 + \gamma (A_{33} - 1) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

com

$$A_{31} = A_{32} = -\frac{\Omega^2}{D} \quad (2.121)$$

$$A_{33} = 1 - \frac{1 + \Omega^2/2}{D} \quad (2.122)$$

$$D = 1 + \beta \Omega^2 \quad (2.123)$$

$$\Omega = \omega \Delta t \quad (2.124)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.125)$$

sendo K e M a rigidez e massa que figuram em (2.116). Tendo em atenção que a resposta dinâmica no instante $t + \Delta t$ é obtida apenas com base na resposta no instante t e na matriz de amplificação, a avaliação desta matriz permite retirar conclusões importantes sobre as propriedades mais relevantes do método de integração.

A equação característica da matriz \underline{A} é expressa por

$$-\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2 A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 = 0 \quad (2.126)$$

em que \underline{I} é a matriz identidade e

$$A_1 = 1 - \frac{\Omega^2 (\gamma + 1/2)}{2D} + \frac{A_3}{2} \quad (2.127)$$

$$A_2 = 1 - \frac{\Omega^2 (\gamma - 1/2)}{D} + 2A_3 \quad (2.128)$$

$$A_3 = 0 \quad (2.129)$$

2.4.1.3 Precisão, estabilidade e dispersão

De acordo com Hilber & Hughes (1978), o erro de truncatura local ε que afecta a solução é definido por

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 \dot{u}^p (\gamma - 1/2)}{D} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.130)$$

A expressão $O(\Delta t^2)$ representa os restantes termos que têm a ordem de grandeza de Δt^2 . Atendendo a (2.130) é possível concluir que o método de Newmark apresenta, sem

quaisquer restrições dos parâmetros β e γ , precisão de primeira ordem. Considerando $\gamma = 1/2$, o método apresenta precisão de segunda ordem.

O erro de truncatura local é do tipo $O(\Delta t^k)$, com $k \geq 1$, o que permite concluir que o erro tende a decrescer à medida que se reduz o intervalo de tempo utilizado. Considera-se por este motivo que o algoritmo é consistente.

Foi assumido, como condição de estabilidade para este método, que a respectiva matriz de amplificação seja estável. Se a matriz \underline{A} for estável para qualquer valor de $\Omega \in [0, \Omega_c]$, em que Ω_c é uma constante positiva, considera-se que o algoritmo é condicionalmente estável, enquanto que se a matriz \underline{A} for estável para qualquer valor de $\Omega \in [0, \infty]$, considera-se que o algoritmo é incondicionalmente estável.

Para que a matriz \underline{A} seja estável é necessário que os seus valores próprios (λ_1, λ_2 e λ_3) verifiquem algumas condições. O raio espectral ρ da matriz \underline{A} é definido por

$$\rho = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \quad (2.131)$$

A condição de estabilidade é verificada se $\rho \leq 1$, caso não existam valores próprios múltiplos. Caso contrário é necessário verificar a condição adicional $|\lambda| < 1$ para os respectivos valores próprios múltiplos. Assumindo $\gamma = 1/2$ de modo a obter precisão de segunda ordem e analisando as condições de estabilidade anteriormente descritas, é possível concluir que o método de Newmark é incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem se

$$\gamma = 1/2 ; \beta = 1/4 \quad (2.132)$$

Conclui-se que o método de Newmark é convergente dado que, para determinados valores de γ e β , a estabilidade e consistência estão garantidas.

De acordo com Hilber & Hughes (1978), como se trata de um método convergente, existe uma constante positiva Ω_c , tal que, se $\Omega \in [0, \Omega_c]$ então a matriz \underline{A} apresenta dois valores próprios complexos, $\lambda_{1,2}$ (raízes principais) e um valor próprio real, λ_3 (raiz espúria), verificando-se entre eles a relação $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1$.

$$\lambda_{1,2} = A \pm B i \quad (2.133)$$

A dispersão τ (ou distorção na frequência) é definida por

$$\tau = \frac{\bar{T} - T}{T} \quad (2.134)$$

sendo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.135)$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \quad (2.136)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\Omega}}{\Delta t} \quad (2.137)$$

$$\bar{\Omega} = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (2.138)$$

Na Figura 2.7 encontra-se representado o raio espectral para alguns algoritmos da família do método de Newmark.

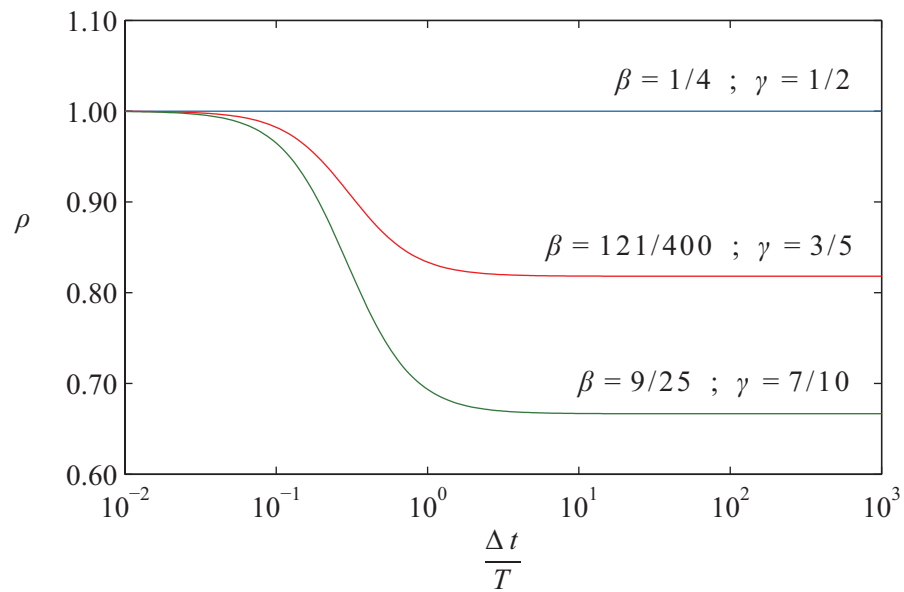


Figura 2.7 – Raio espectral.

Na Figura 2.8 está representada a dispersão associada aos algoritmos considerados na Figura 2.7. Verifica-se que todos apresentam dispersões semelhantes, sendo o algoritmo associado aos parâmetros $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ (regra trapezoidal) aquele que apresenta menor dispersão e o único com precisão de segunda ordem (Hughes, 2000).

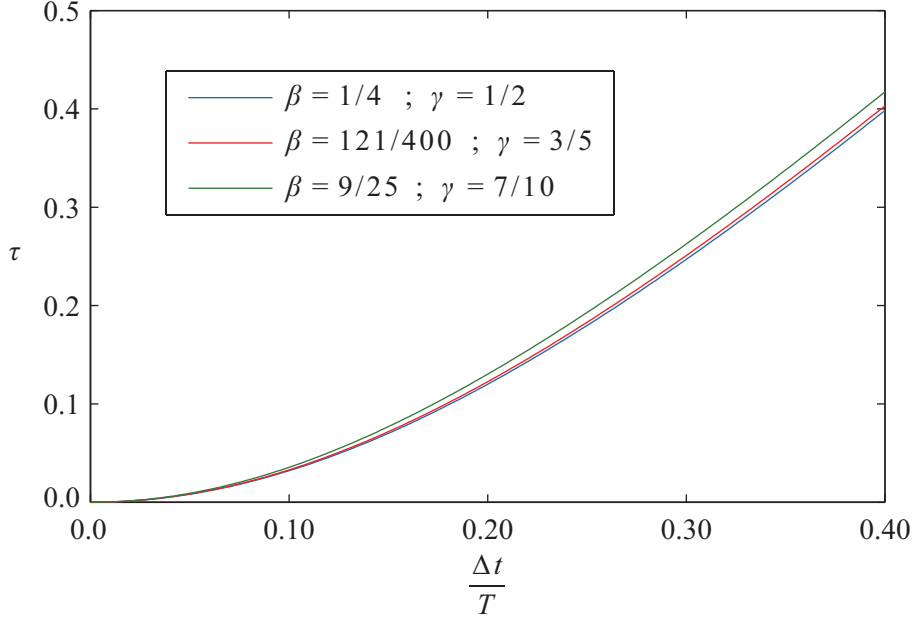


Figura 2.8 – Dispersão.

2.4.1.4 Amortecimento algorítmico

O coeficiente de amortecimento algorítmico é definido por (Hilber & Hughes, 1978)

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln(\rho^2)}{2\bar{\Omega}} = -\frac{\ln(A^2 + B^2)}{2\bar{\Omega}} \quad (2.139)$$

O aumento da dissipação algorítmica é conseguido por intermédio da diminuição do raio espectral. Na Figura 2.9 encontra-se representado o coeficiente de amortecimento algorítmico para algumas combinações dos valores dos parâmetros β e γ .

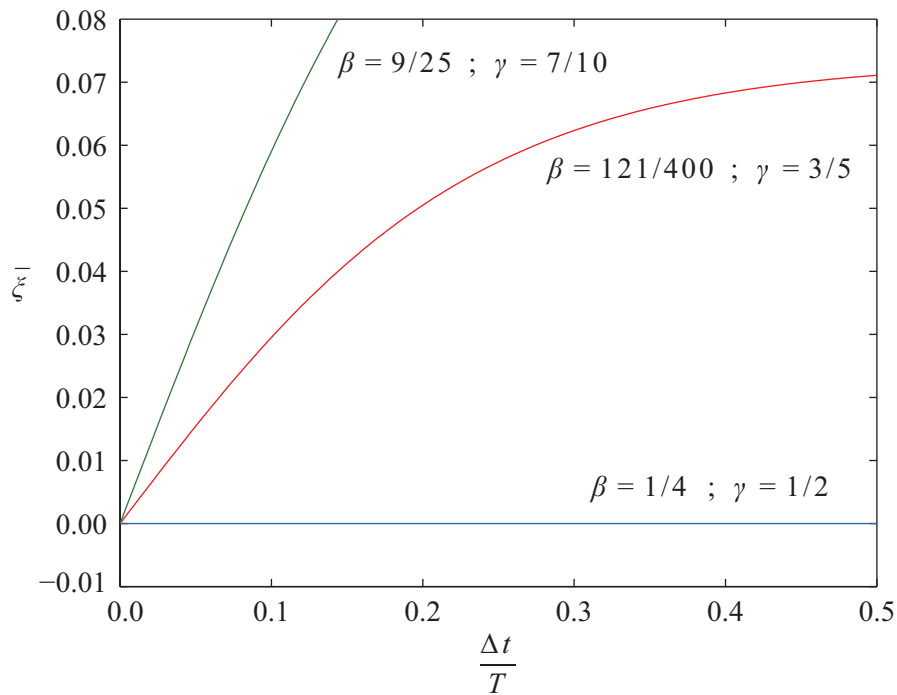


Figura 2.9 – Coeficiente de amortecimento algorítmico.

Verifica-se que o amortecimento algorítmico do método de Newmark é conseguido mediante a escolha de valores de $\gamma > 1/2$ e que é nulo para valores de $\gamma = 1/2$. No entanto, para $\gamma \neq 1/2$ o método perde a precisão de segunda ordem. Segundo Faria (1994), as características de dissipação deste método relativas ao domínio das frequências elevadas são claramente inferiores às de outros métodos de integração directa, como por exemplo, os métodos de Houbolt e de Wilson- θ . O método de Newmark conduz a um amortecimento excessivo da resposta dinâmica no domínio das baixas frequências, ao contrário do que sucede para as frequências elevadas, sendo este comportamento claramente oposto ao que é pretendido no âmbito da dinâmica estrutural.

Nos casos em que não seja necessário considerar amortecimento algorítmico, o método de Newmark associado aos parâmetros $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ constitui o método mais preciso e eficiente.

2.4.2 Método- α de Hilber-Hughes-Taylor

2.4.2.1 Expressões fundamentais

Com o objectivo de atenuar as principais desvantagens apresentadas pelo método de Newmark foi proposto por Hilber *et al.* (1977) um algoritmo com os seguintes requisitos:

- 1) ser incondicionalmente estável quando aplicado a problemas lineares;
- 2) ter capacidade de controlo da dissipação algorítmica mediante um determinado parâmetro, para além do intervalo do tempo, apresentando como caso particular, amortecimento algorítmico nulo;
- 3) a dissipação numérica não deve afectar significativamente as contribuições dos modos de vibração com frequências baixas.

Este algoritmo é baseado no método de Newmark e introduz um parâmetro adicional α , sendo por este motivo designado método- α . As expressões (2.95) e (2.96) que definem os valores $\underline{\ddot{u}}^c$ e \underline{u}^c mantêm-se, sendo agora utilizada a seguinte equação de equilíbrio dinâmico

$$\underline{M} \underline{\ddot{u}}^c + (1 + \alpha) \underline{C} \underline{\dot{u}}^c - \alpha \underline{C} \underline{\dot{u}}^p + (1 + \alpha) \underline{K} \underline{u}^c - \alpha \underline{K} \underline{u}^p = (1 + \alpha) \underline{F}^c - \alpha \underline{F}^p \quad (2.140)$$

O método- α reduz-se ao método de Newmark para $\alpha = 0$. Distinguindo os graus de liberdade livres dos prescritos, pode-se escrever (2.140) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \underline{M}_{FF} & \underline{M}_{FP} \\ \underline{M}_{PF} & \underline{M}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_F^c \\ \underline{\ddot{u}}_P^c \end{bmatrix} + (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \underline{C}_{FF} & \underline{C}_{FP} \\ \underline{C}_{PF} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_F^c \\ \underline{\dot{u}}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{C}_{FF} & \underline{C}_{FP} \\ \underline{C}_{PF} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}_F^p \\ \underline{\dot{u}}_P^p \end{bmatrix} \\ & + (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \underline{K}_{FF} & \underline{K}_{FP} \\ \underline{K}_{PF} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_F^c \\ \underline{u}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{K}_{FF} & \underline{K}_{FP} \\ \underline{K}_{PF} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_F^p \\ \underline{u}_P^p \end{bmatrix} = \\ & (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \underline{F}_F^c \\ \underline{F}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{F}_F^p \\ \underline{F}_P^p \end{bmatrix} + (1 + \alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R}_P^p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.141)$$

Desenvolvendo (2.141) obtêm-se as seguintes equações, que se referem, respectivamente, a graus de liberdade livres e prescritos.

$$\begin{aligned}
\underline{M}_{FF} \ddot{\underline{u}}_F^c + (1+\alpha) \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^c + (1+\alpha) \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c &= (1+\alpha) \underline{F}_F^c - \alpha \underline{F}_F^p \\
- \underline{M}_{FP} \ddot{\underline{u}}_P^c - (1+\alpha) \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^c + \alpha \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^p + \alpha \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^p & \\
- (1+\alpha) \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^c + \alpha \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^p + \alpha \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^p &
\end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned}
\underline{R}_P^c &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{R}_P^p + \frac{1}{1+\alpha} \underline{M}_{PF} \ddot{\underline{u}}_F^c + \frac{1}{1+\alpha} \underline{M}_{PP} \ddot{\underline{u}}_P^c \\
+ \underline{C}_{PF} \dot{\underline{u}}_F^c + \underline{C}_{PP} \dot{\underline{u}}_P^c - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{C}_{PF} \dot{\underline{u}}_F^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{C}_{PP} \dot{\underline{u}}_P^p & \\
+ \underline{K}_{PF} \underline{u}_F^c + \underline{K}_{PP} \underline{u}_P^c - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{K}_{PF} \underline{u}_F^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{K}_{PP} \underline{u}_P^p - \underline{F}_P^c + \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{F}_P^p &
\end{aligned} \quad (2.143)$$

De aqui em diante apenas é desenvolvida a equação (2.142), resultando

$$\underline{M}_{FF} \ddot{\underline{u}}_F^c + (1+\alpha) \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^c + (1+\alpha) \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c = \overline{\underline{F}}_F^c \quad (2.144)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{F}}_F^c &= (1+\alpha) \underline{F}_F^c - \alpha \underline{F}_F^p - \underline{M}_{FP} \ddot{\underline{u}}_P^c - (1+\alpha) \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^c + \alpha \underline{C}_{FF} \dot{\underline{u}}_F^p \\
+ \alpha \underline{C}_{FP} \dot{\underline{u}}_P^p - (1+\alpha) \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^c + \alpha \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^p + \alpha \underline{K}_{FP} \underline{u}_P^p &
\end{aligned} \quad (2.145)$$

Como (2.95) e (2.96) se mantêm, também (2.103) e (2.107) permanecem válidas. Substituindo (2.103) e (2.107) em (2.144), obtém-se

$$\begin{aligned}
\underline{M}_{FF} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] & \\
+ (1+\alpha) \underline{C}_{FF} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_F^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] & \\
+ (1+\alpha) \underline{K}_{FF} \underline{u}_F^c &= \overline{\underline{F}}_F^c
\end{aligned} \quad (2.146)$$

Colocando \underline{u}_F^c em evidência resulta

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M}_{FF} + (1+\alpha) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{C}_{FF} + (1+\alpha) \underline{K}_{FF} \right) \underline{u}_F^c = \overline{\underline{F}}_F^c \\
& + \underline{M}_{FF} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_F^p + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_F^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{FF} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_F^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_F^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_F^p \right]
\end{aligned} \tag{2.147}$$

ou de um modo mais compacto

$$\overline{\underline{K}}_{FF} \underline{u}_F^c = \overline{\underline{F}}_F^c \tag{2.148}$$

com

$$\overline{\underline{K}}_{FF} = A_0 \underline{M}_{FF} + (1+\alpha) A_1 \underline{C}_{FF} + (1+\alpha) \underline{K}_{FF} \tag{2.149}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{F}}_F^c &= \overline{\underline{F}}_F^c + \underline{M}_{FF} \left[A_0 \underline{u}_F^p + A_2 \dot{\underline{u}}_F^p + A_3 \ddot{\underline{u}}_F^p \right] \\
&+ (1+\alpha) \underline{C}_{FF} \left[A_1 \underline{u}_F^p + A_4 \dot{\underline{u}}_F^p + A_5 \ddot{\underline{u}}_F^p \right]
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Os parâmetros A_0 a A_5 são definidos por (2.115).

A análise das principais características do método- α segue um caminho idêntico ao utilizado no caso do método de Newmark. Por esse motivo, apresenta-se em seguida uma análise mais resumida das principais características do método- α .

2.4.2.2 Matriz de amplificação

Segundo Hilber *et al.* (1977), a matriz de amplificação para o método- α é definida por

$$\underline{A} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 + \alpha \beta \Omega^2 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma \Omega^2 & 1 - (1 + \alpha)(\gamma - \beta) \Omega^2 & 1 - \gamma - (1 + \alpha) \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right) \Omega^2 \\ -\Omega^2 & -(1 + \alpha) \Omega^2 & -(1 + \alpha) \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

com

$$D = 1 + (1 + \alpha) \beta \Omega^2 \quad (2.152)$$

e em que Ω e ω são definidos por (2.124) e (2.125), respectivamente.

A equação característica da matriz \underline{A} é expressa por

$$-\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2 A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 = 0 \quad (2.153)$$

sendo

$$A_1 = 1 - \frac{\Omega^2 [(1 + \alpha)(\gamma + 1/2) - \alpha \beta]}{2D} \quad (2.154)$$

$$A_2 = 1 - \frac{\Omega^2 [\gamma - 1/2 + 2\alpha(\gamma - \beta)]}{D} \quad (2.155)$$

$$A_3 = \frac{\alpha \Omega^2 (\beta - \gamma + 1/2)}{D} \quad (2.156)$$

2.4.2.3 Precisão, estabilidade e dispersão

Segundo Hughes (2000), o método- α é incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem se

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] ; \quad \gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2} ; \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \quad (2.157)$$

O raio espectral encontra-se definido em (2.131). Na Figura 2.10 está representado o raio espectral para alguns valores dos parâmetros α , β e γ , definidos de modo a obter-se precisão de segunda ordem e estabilidade incondicional. Verifica-se que uma diminuição do parâmetro α conduz a uma diminuição do raio espectral.

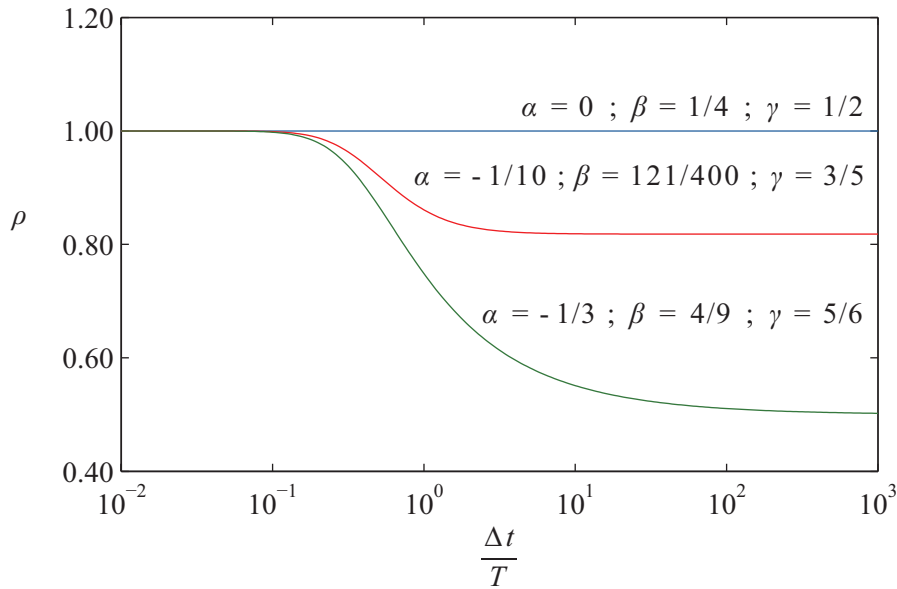


Figura 2.10 – Raio espectral.

De acordo com Hilber *et al.* (1977), o método- α é convergente e por isso mantêm-se válidos os conceitos de raízes principais e de raiz espúria utilizados anteriormente, bem como as respectivas expressões que definem a dispersão e o amortecimento algorítmico. A dispersão é definida por (2.134), encontrando-se representada na Figura 2.11 para os parâmetros α , β e γ definidos na Figura 2.10.

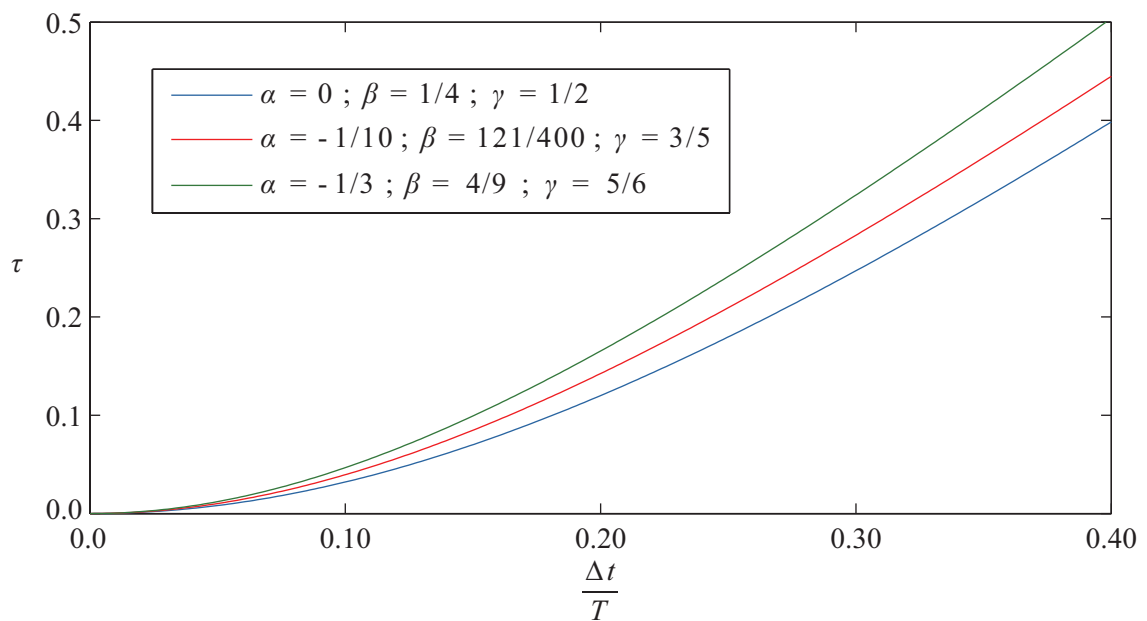


Figura 2.11 – Dispersão.

2.4.2.4 Amortecimento algorítmico

O coeficiente de amortecimento algorítmico é definido por (2.139) e encontra-se representado na Figura 2.12. Os valores dos parâmetros α , β e γ foram definidos de acordo com (2.157) para garantir que o método seja incondicionalmente estável e tenha precisão de segunda ordem.

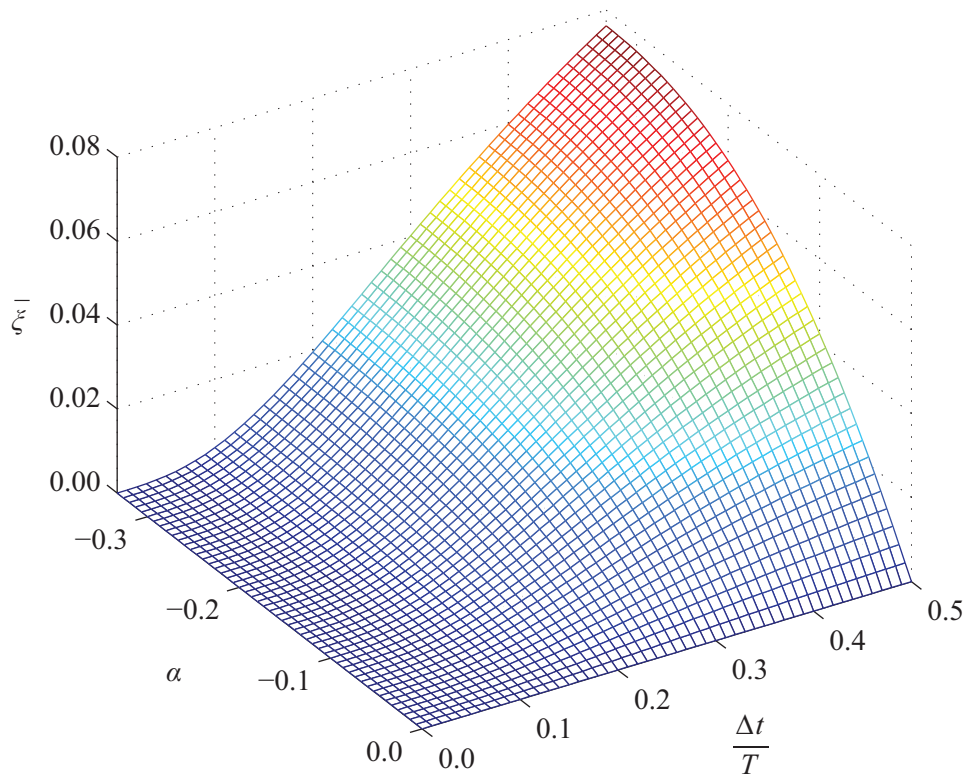


Figura 2.12 – Coeficiente de amortecimento algorítmico.

Segundo Hilber *et al.* (1977), o método- α também apresenta capacidade de amortecimento algorítmico para valores positivos de α sendo, no entanto, pouco eficiente. Este método é estável para $\alpha \in [-1/2, 0]$ mas apenas tem interesse prático no intervalo definido em (2.157), uma vez que se verifica, por intermédio de experimentação numérica, que não é possível aumentar significativamente o amortecimento para valores de $\alpha < -1/3$.

Na Figura 2.13 encontra-se representado o coeficiente de amortecimento para alguns algoritmos da família do método de Newmark e da família do método- α .

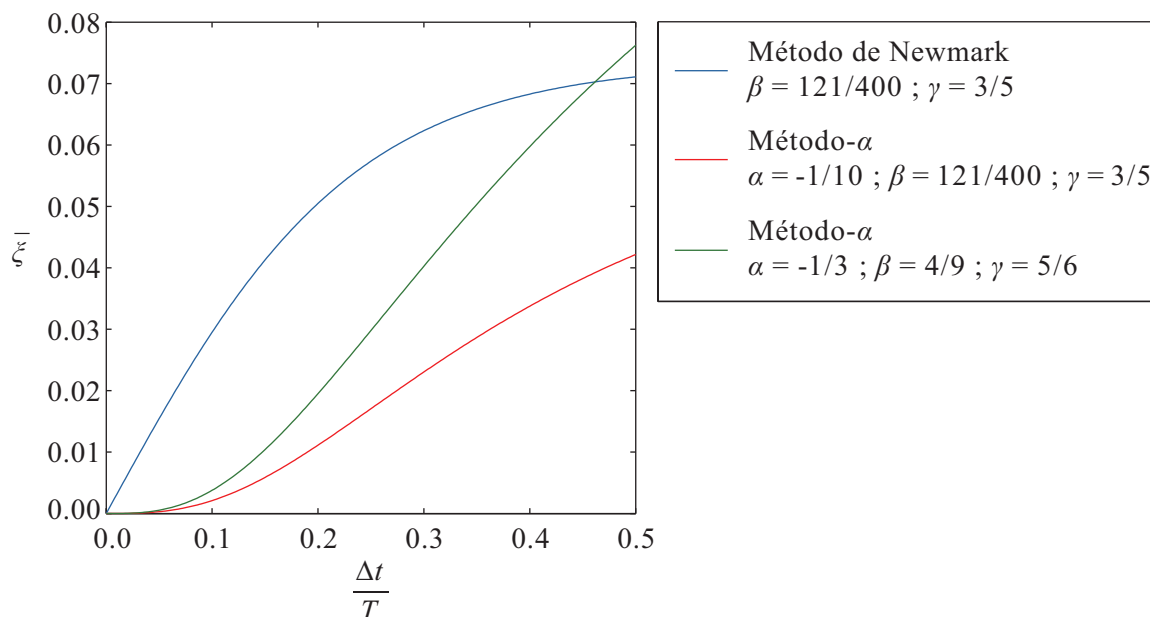


Figura 2.13 – Coeficiente de amortecimento algorítmico.

Verifica-se que o comportamento do método- α relativamente à capacidade de dissipação algorítmica é muito superior ao evidenciado pelo método de Newmark, quer no domínio das frequências baixas, quer no domínio das frequências elevadas. O método- α apresenta amortecimento quase nulo no domínio das frequências baixas mas assegura elevada dissipação no domínio das frequências elevadas. Além das vantagens referidas anteriormente, apresenta também um controlo paramétrico muito eficiente da dissipação. Por estes motivos, nos casos em que seja necessário considerar amortecimento algorítmico, o método- α é o que apresenta melhores características.

2.5 VALIDAÇÃO

No âmbito da presente dissertação foram implementadas no programa FEMIX 4.0 as matrizes elementares de massa para os seguintes tipos de elementos:

- sólidos tridimensionais;
- estruturas reticuladas bidimensionais e tridimensionais (pórticos 2D e 3D);
- estruturas articuladas bidimensionais e tridimensionais (treliças 2D e 3D).

Dado que a matriz elementar de massa do elemento de pórtico 3D contém todos os termos das matrizes elementares de massa dos restantes elementos de viga, considera-se suficiente a validação de apenas um exemplo com elementos de pórtico 3D e um outro

exemplo com sólidos 3D. Os resultados obtidos com o programa FEMIX 4.0 para os referidos exemplos são comparados com os resultados obtidos com o programa ANSYS 11.0.

2.5.1 Sólido tridimensional

Na Figura 2.14 encontra-se representado um sólido tridimensional sujeito a um conjunto de forças concentradas aplicadas instantaneamente no ponto P , actuando durante todo o tempo da análise. O sólido tridimensional está discretizado em 64 elementos sólidos 3D de oito nós. Todos os graus de liberdade pertencentes aos pontos nodais situados na base do sólido estão prescritos.

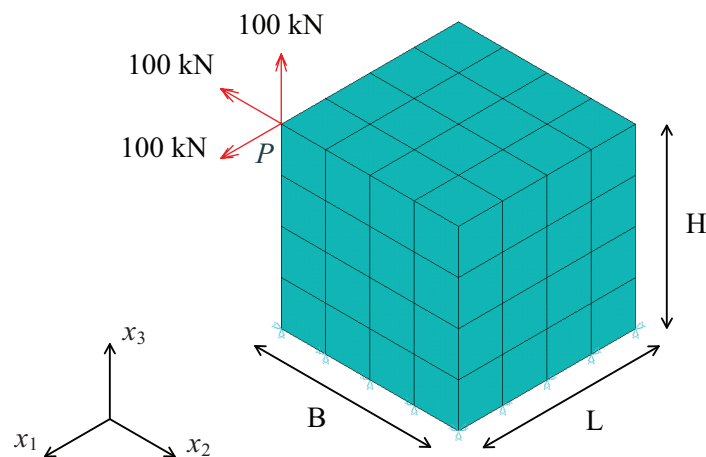


Figura 2.14 – Sólido sujeito a um conjunto de cargas concentradas.

As propriedades geométricas e mecânicas do sólido estão especificadas no Quadro 2.1. Não é considerado qualquer tipo de amortecimento.

Quadro 2.1 – Propriedades geométricas e mecânicas do sólido.

	Valor	Unidades
$B, L \text{ e } H$	1.0	m
E	100	MPa
ν	0.30	-
ρ	2000	kg/m ³

A equação de equilíbrio dinâmico é resolvida pelo método- α , tendo-se adoptado os seguintes parâmetros: $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.50$ e $\alpha = 0$. São considerados 5000

intervalos de tempo. Na Figura 2.15 apresentam-se os resultados referentes ao ponto *P* (ver Figura 2.14) em termos de deslocamento, velocidade e aceleração verticais.

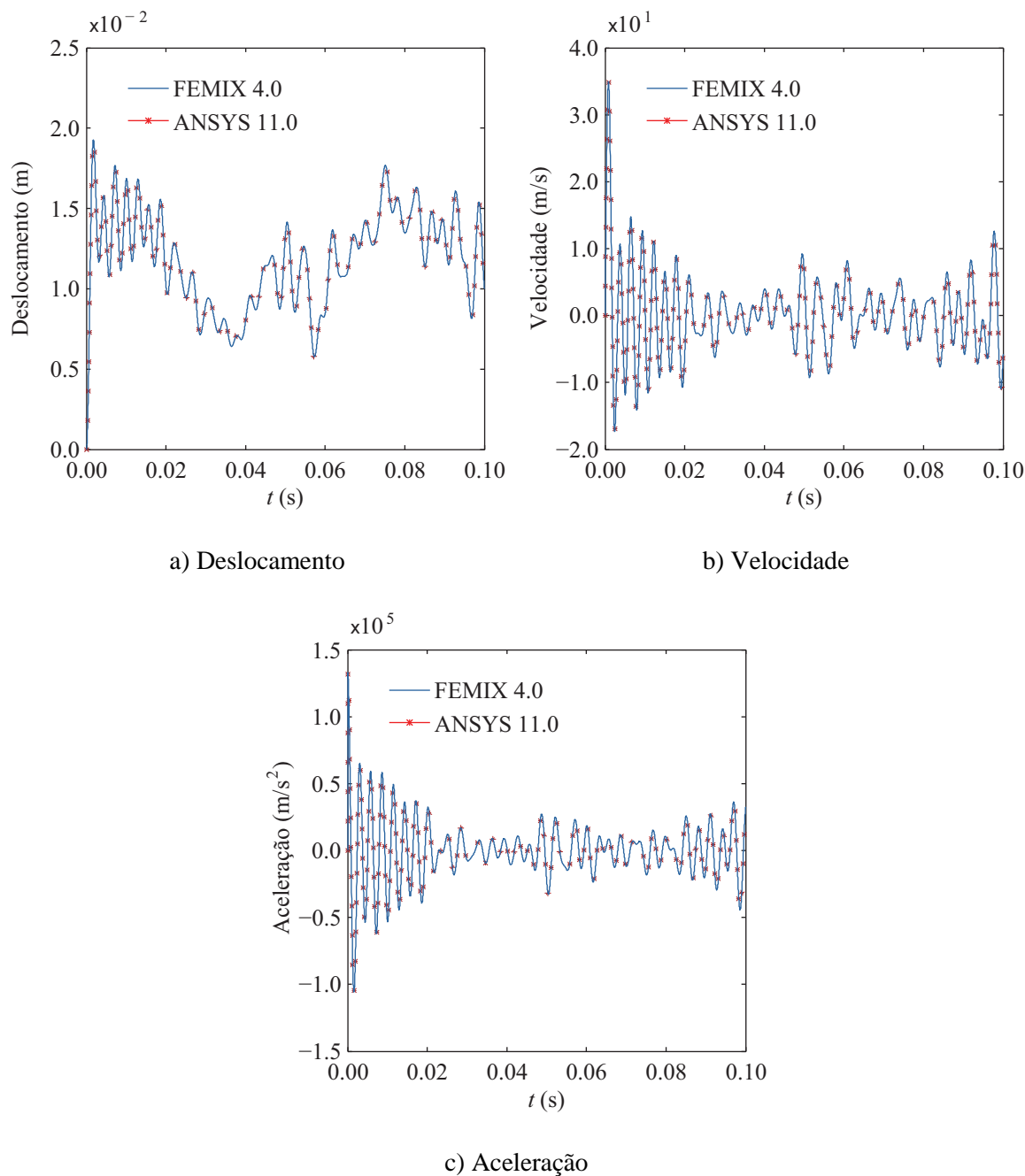


Figura 2.15 – Resultados correspondentes ao ponto *P* (ver Figura 2.14).

Verifica-se que os resultados obtidos com os programas FEMIX 4.0 e ANSYS 11.0 são praticamente coincidentes.

2.5.2 Viga tridimensional

Na Figura 2.16 encontra-se representada uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força concentrada aplicada instantaneamente a meio vão, actuando durante todo o tempo da análise. O modelo numérico da viga é composto por 50 elementos finitos de pórtico 3D.

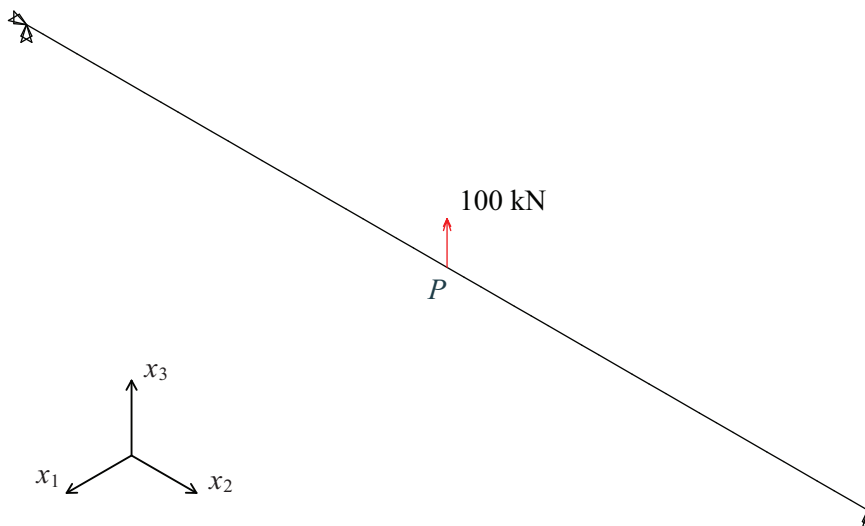


Figura 2.16 – Viga sujeita a uma carga concentrada.

As propriedades geométricas e mecânicas da viga são baseadas nas que foram adoptadas por Yang & Wu (2001) e estão especificadas no Quadro 2.2. Não é considerado qualquer tipo de amortecimento.

Quadro 2.2 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga.

	Valor	Unidades
L	25.0	m
B e H	2.43	m
A	5.90	m ²
I_2 e I_3	2.90	m ⁴
E	2.87	GPa
ν	0.2	-
\bar{m}	2303	kg/m

A equação de equilíbrio dinâmico é resolvida pelo método- α , tendo-se adoptado os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.0002$ s, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.50$ e $\alpha = 0$. São considerados 5000 intervalos de tempo. Na Figura 2.17 apresentam-se os resultados referentes ao ponto P (ver Figura 2.16) em termos de deslocamento, velocidade e aceleração verticais. Apenas se apresentam os resultados referentes à aceleração vertical para os primeiros 1250 intervalos de tempo para facilitar a respectiva visualização.

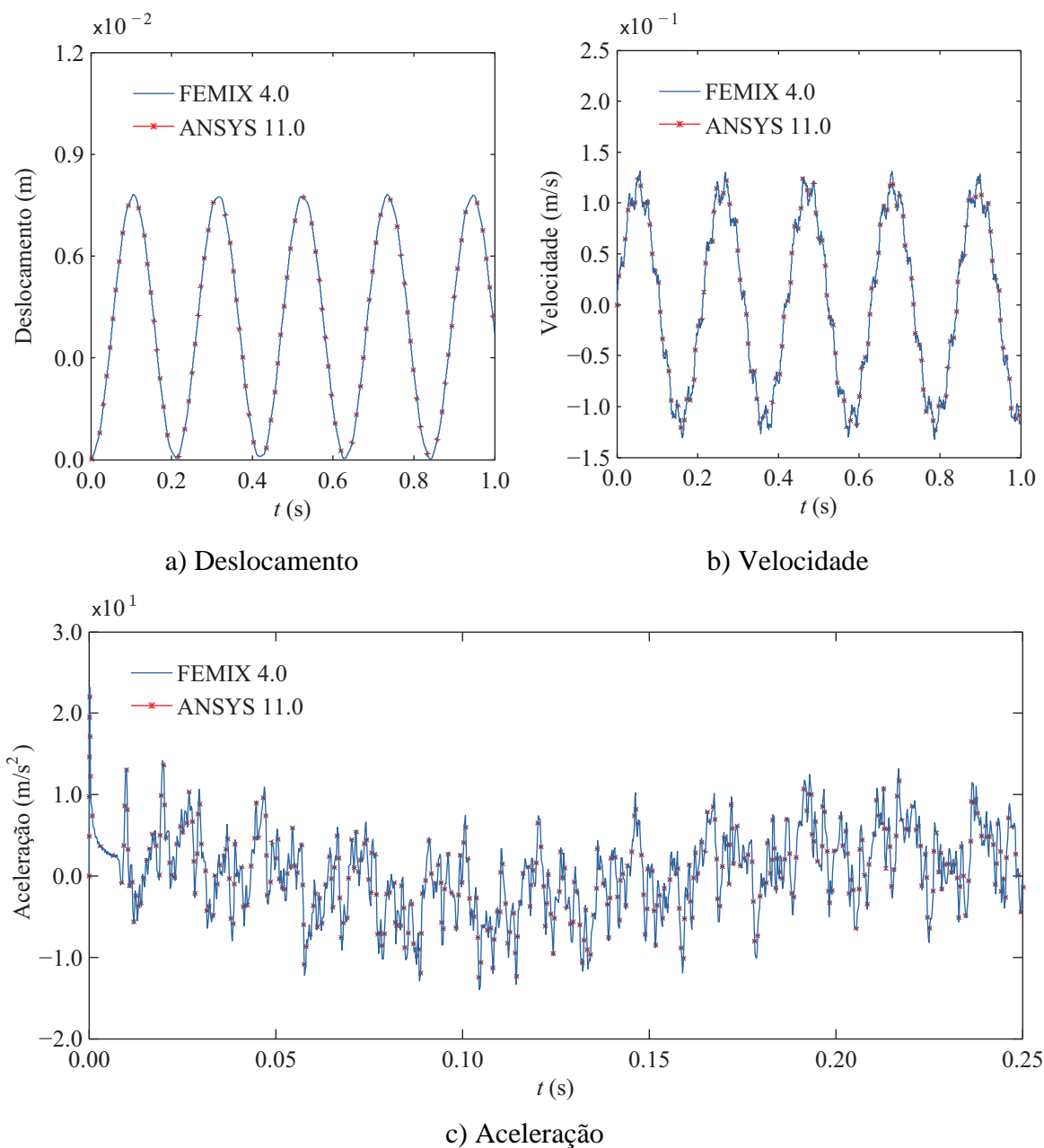


Figura 2.17 – Resultados referentes ao ponto P (ver Figura 2.16).

Verifica-se que os resultados obtidos com os programas FEMIX 4.0 e ANSYS 11.0 são praticamente coincidentes.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIAS DE ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA VEÍCULO-ESTRUTURA

3.1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de uma estrutura sujeita à passagem de um veículo pode ser analisado com ou sem a consideração da interacção entre os dois sistemas. Nos casos em que a interacção não influencie significativamente a resposta dinâmica da estrutura, as acções do veículo podem ser simuladas com um conjunto de cargas móveis. Nos outros casos, nomeadamente em vias de alta velocidade, para avaliar de forma mais precisa o referido comportamento dinâmico ou para analisar a resposta dinâmica do veículo, é necessário modelar este último tendo em atenção as suas características dinâmicas e considerar a interacção existente entre os dois sistemas.

Os efeitos dinâmicos em vias de alta velocidade têm sido alvo de estudo por parte de diversos investigadores. Frýba (2005) refere as elevadas amplificações dinâmicas verificadas em pontes ferroviárias devidas ao aumento da velocidade de circulação. Nos últimos anos, a velocidade no transporte comercial de passageiros aumentou cerca de 100 km/h em cada década, atingindo hoje valores da ordem dos 350 km/h. Yau *et al.* (1999) estudaram o conforto dos passageiros com base na aceleração vertical máxima do veículo. Concluíram que as irregularidades verticais da via e a rigidez e o amortecimento das suspensões do veículo podem afectar de forma significativa o conforto dos passageiros. Referem também que o dimensionamento de vias de alta velocidade é, na generalidade dos casos, condicionado pelo nível de conforto dos passageiros e não por estados limites últimos da estrutura. Para avaliar de forma precisa todos os efeitos

dinâmicos referidos é necessário dispor de ferramentas numéricas apropriadas que possam traduzir a complexidade do sistema veículo-estrutura.

Como foi atrás referido, a passagem de um veículo sobre uma estrutura pode ser simulada por intermédio de um conjunto de cargas móveis correspondentes aos eixos do veículo. Na secção 3.2 apresenta-se, de modo sintético, a metodologia utilizada para efectuar este tipo de modelação, em que as acções do veículo são simuladas por um conjunto de cargas concentradas cuja posição varia ao longo do tempo, de acordo com a posição do veículo.

A simulação do sistema veículo-estrutura requer a consideração de diversas malhas de elementos finitos e as suas compatibilizações em pontos de contacto. Este tipo de compatibilização pode necessitar de uma ligação entre dois pontos nodais, entre um ponto nodal e um ponto interior ao elemento finito ou entre dois pontos interiores aos elementos finitos. O último tipo de compatibilização não é abordado na presente dissertação. Neste capítulo são apresentadas duas metodologias para analisar a interacção entre os diversos subsistemas, sendo assumido em ambas um contacto perfeito entre o veículo e a estrutura, o que implica que a força de interacção correspondente possa assumir valores positivos, negativos ou nulos, não provocando deste modo um comportamento não linear do sistema. A secção 3.3 é integralmente dedicada à apresentação de uma metodologia de análise da interacção veículo-estrutura baseada numa formulação desenvolvida por Delgado & Santos (1997) e Calçada (1995). Nesta metodologia, o processo de compatibilização dos deslocamentos generalizados nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo é efectuado por intermédio de um processo iterativo. Os deslocamentos generalizados englobam deslocamentos e rotações, admitindo-se por simplificação que os deslocamentos mencionados neste capítulo são sempre generalizados, pelo que se passa a omitir essa menção. O mesmo se passa para as forças generalizadas, que englobam forças e momentos.

A segunda metodologia de análise da interacção veículo-estrutura abordada neste capítulo foi desenvolvida por Azevedo *et al.* (2007), sendo apresentada na secção 3.4. As equações de equilíbrio dinâmico em graus de liberdade não prescritos (livres), em graus de liberdade com interacção e em graus de liberdade prescritos são desenvolvidas separadamente. A equação de compatibilidade de deslocamentos entre os pontos do veículo e os pontos da estrutura é também desenvolvida de modo separado. As equações atrás referidas constituem um único sistema de equações que pode ser resolvido de forma

eficiente e directa mediante a sua divisão em diversas submatrizes, de acordo com as suas características específicas. Dado que o referido sistema de equações é composto por equações de equilíbrio de forças e equações de compatibilidade de deslocamentos, passa a ser designado por sistema de equações misto. As equações de equilíbrio dinâmico são resolvidas pelo método- α apresentado na secção 2.4.2.

3.2 MODELAÇÃO COM CARGAS MÓVEIS

3.2.1 Modelação com cargas concentradas

A passagem de um veículo sobre uma estrutura pode ser simulada por intermédio de um conjunto de cargas móveis correspondentes aos eixos do veículo. No âmbito da presente dissertação, as acções do veículo são modeladas por um conjunto de cargas concentradas cuja posição varia ao longo do tempo, de acordo com a posição do veículo. Na Figura 3.1 encontra-se representado o comboio Alfa pendular e o respectivo conjunto de cargas móveis que simulam as acções verticais.

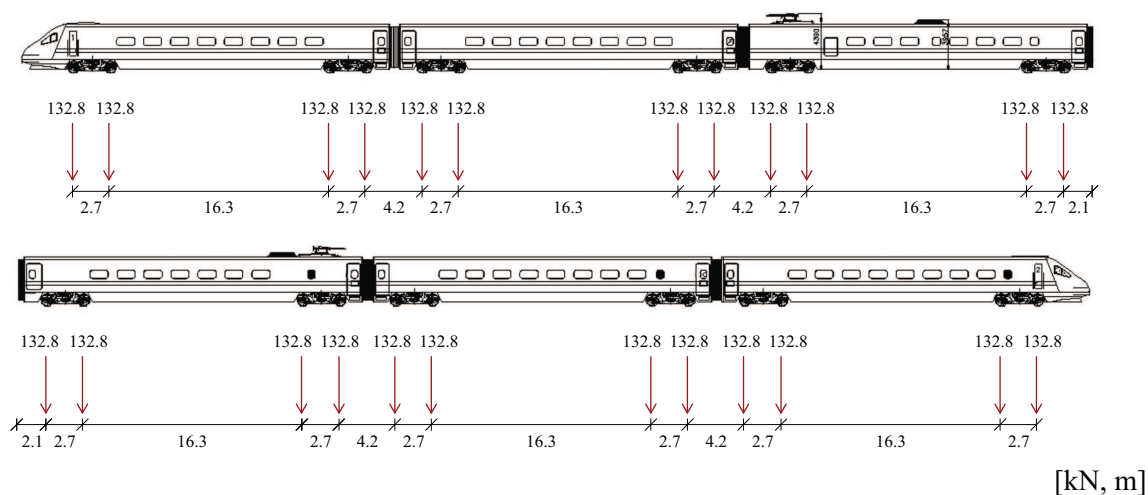


Figura 3.1 – Comboio Alfa pendular e respectivo conjunto de cargas móveis.

Cada carga concentrada (\underline{Q}) é constituída por seis componentes: três forças (Q_1 a Q_3) e três momentos (Q_4 a Q_6), sendo definida por

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Caso apenas se considere o efeito das forças verticais (ver Figura 3.1), a equação (3.1) passa a ser

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O percurso de cada conjunto de cargas móveis é definido por uma sequência de segmentos de recta auxiliares, que têm de estar contidos em elementos finitos pertencentes à estrutura. No caso da estrutura ser modelada com elementos de viga, os eixos das vias podem não coincidir com os eixos dos elementos de viga, sendo necessário considerar as excentricidades (e) das cargas concentradas em relação aos eixos dos elementos finitos. Na Figura 3.2 encontra-se representada uma estrutura modelada com elementos de viga sujeita à acção de dois conjuntos de cargas móveis, em que os eixos das vias 1 e 2 não coincidem com os eixos dos elementos de viga.

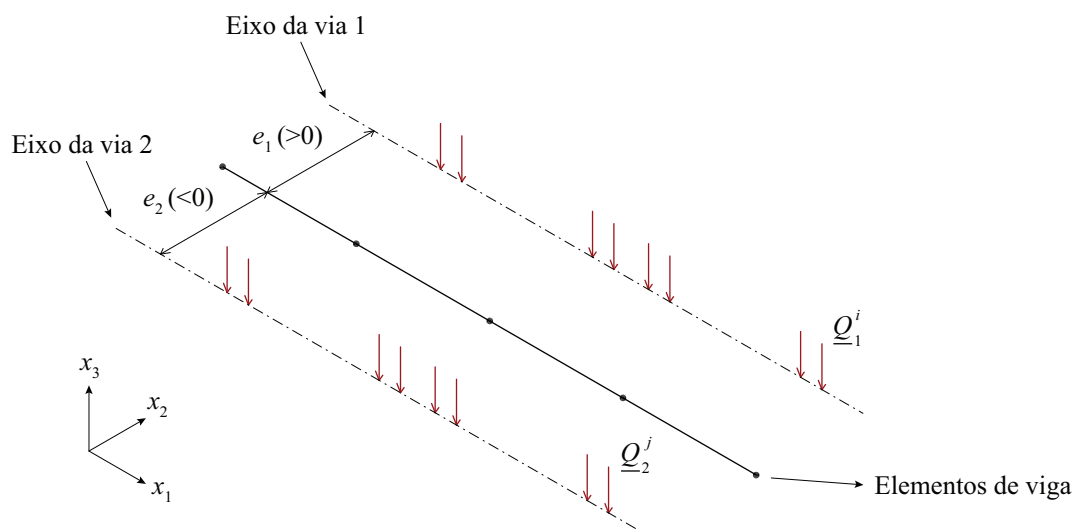


Figura 3.2 – Estrutura sujeita à acção de dois conjuntos de cargas móveis.

Neste caso, cada carga concentrada passa a ser definida por

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_3 e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Cada carga concentrada é aplicada num ponto interior de um elemento finito pertencente à estrutura. O cálculo das forças nodais equivalentes é efectuado com base em (2.35).

3.2.2 Validação

Na Figura 3.3 encontra-se representada uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga móvel. O modelo numérico da viga é composto por 50 elementos finitos de pórtico 2D. A carga concentrada move-se a uma velocidade constante de $v = 100 \text{ km/h}$.

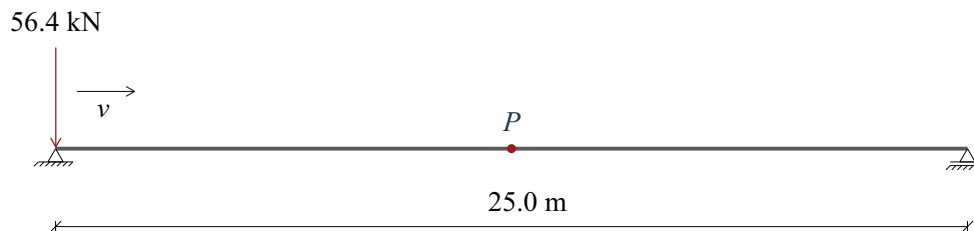


Figura 3.3 – Viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga móvel.

As propriedades geométricas e mecânicas da viga são baseadas nas que foram adoptadas por Yang & Wu (2001) e estão especificadas no Quadro 3.1. Não foi considerado qualquer tipo de amortecimento.

Quadro 3.1 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga.

	Valor	Unidades
L	25.0	m
B e H	2.43	m
A	5.90	m ²
I_2 e I_3	2.90	m ⁴
E	2.87	GPa
ν	0.2	-
\bar{m}	2303	kg/m

É utilizado o método- α para resolver a equação de equilíbrio dinâmico, tendo-se adoptado os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.005$ s, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.50$ e $\alpha = 0$. São considerados 180 intervalos de tempo.

Na Figura 3.4 apresentam-se os resultados referentes ao ponto P (ver Figura 3.3) em termos de deslocamento, velocidade e aceleração verticais.

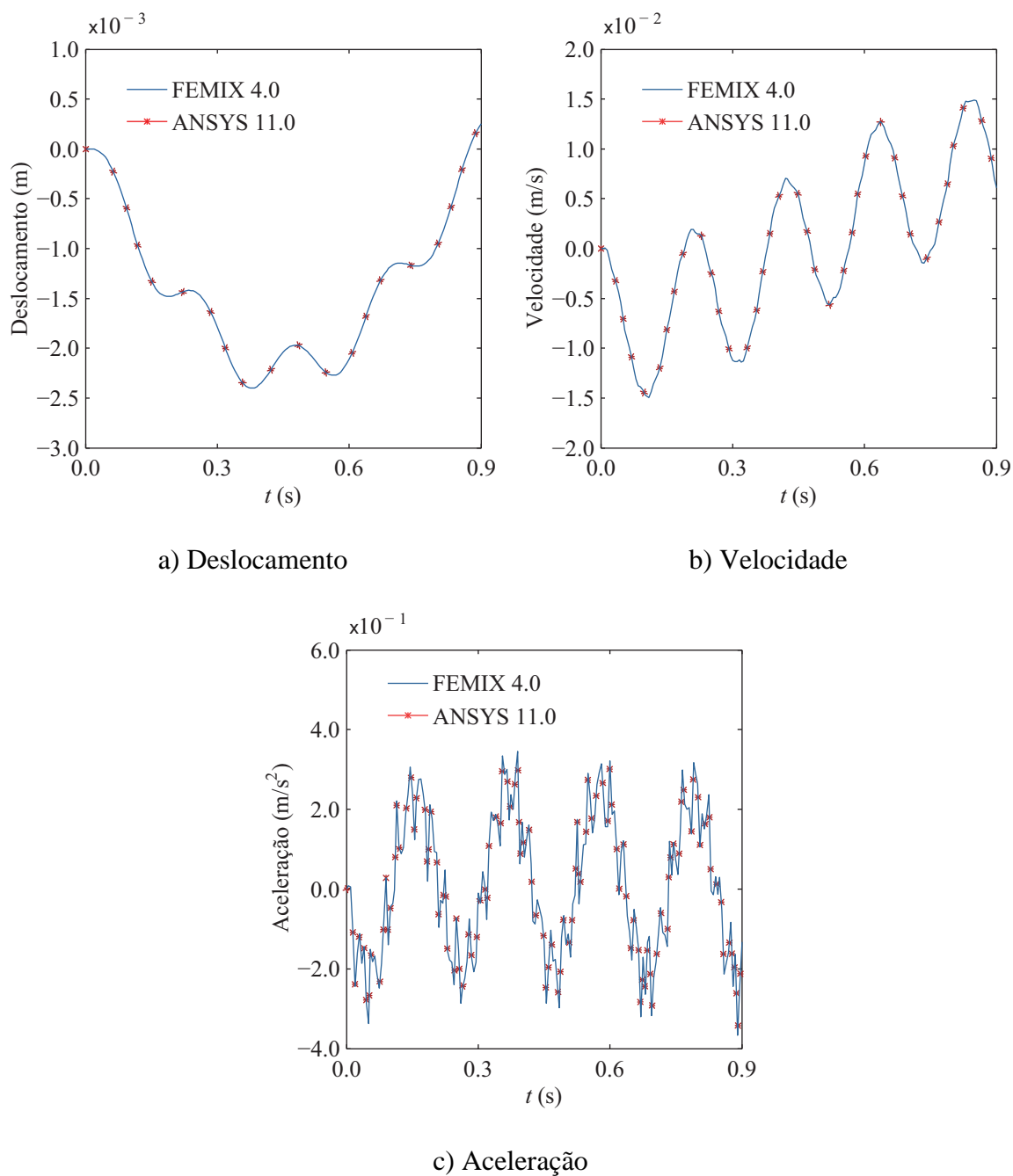


Figura 3.4 – Resultados referentes ao ponto P (ver Figura 3.3).

Verifica-se que os resultados obtidos com os programas FEMIX 4.0 e ANSYS 11.0 são praticamente coincidentes.

3.3 MÉTODO ITERATIVO

Delgado & Santos (1997) e Calçada (1995) desenvolveram um algoritmo para analisar a interação veículo-estrutura, que foi implementado no programa de cálculo

automático FEMIX 2.1. A metodologia apresentada nesta secção é baseada no referido algoritmo, sendo designada por *método iterativo*, dado que a compatibilização dos deslocamentos nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo é efectuada por intermédio de um processo iterativo.

Este método é baseado nos seguintes pressupostos:

- 1) a interacção veículo-estrutura é considerada nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo;
- 2) o contacto entre os pontos do veículo e da estrutura é sempre perfeito.

3.3.1 Equação de equilíbrio dinâmico

O equilíbrio dinâmico do sistema veículo-estrutura no instante t é estabelecido com base na equação

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (3.4)$$

sendo \underline{M} a matriz de massa, \underline{C} a matriz de amortecimento, \underline{K} a matriz de rigidez e $\underline{F}(t)$ as forças aplicadas. Os vectores $\underline{u}(t)$, $\dot{\underline{u}}(t)$ e $\ddot{\underline{u}}(t)$ representam deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente.

Para exemplificar a referida metodologia, encontra-se representado na Figura 3.5 um veículo suportado por uma viga simplesmente apoiada. Por simplificação, o peso próprio do veículo é simulado por um conjunto de cargas móveis (\underline{Q}) que se encontram aplicadas em cada um dos seus eixos.

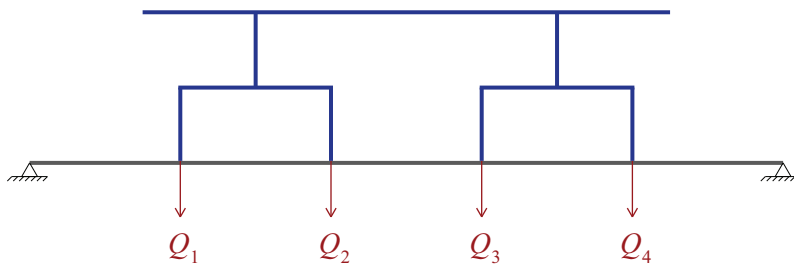


Figura 3.5 – Sistema integrado: estrutura e veículo.

Considera-se que a estrutura e o veículo são dois subsistemas independentes, estabelecendo-se o equilíbrio dinâmico para a estrutura e para o veículo separadamente. A equação (3.4) passa a ser

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_s & 0 \\ 0 & \underline{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}}_s(t) \\ \ddot{\underline{u}}_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_s & 0 \\ 0 & \underline{C}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}_s(t) \\ \dot{\underline{u}}_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_s & 0 \\ 0 & \underline{K}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_s(t) \\ \underline{u}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_s(t) \\ \underline{F}_v(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O índice s (*structure*) indica que as variáveis correspondentes estão associadas à estrutura e o índice v (*vehicle*) indica que estão associadas ao veículo. Os graus de liberdade não prescritos (livres) do veículo em que existe interacção com a estrutura são substituídos por graus de liberdade prescritos (X). De acordo com (3.5), o sistema representado na Figura 3.5 é equivalente aos dois subsistemas representados na Figura 3.6.

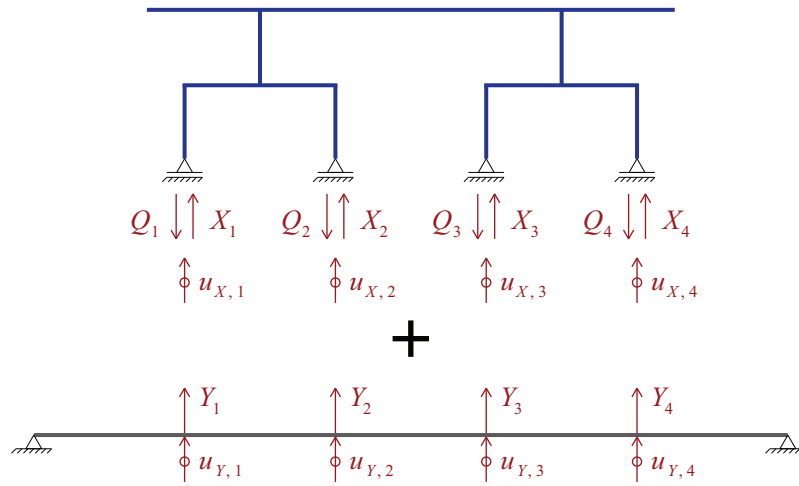


Figura 3.6 – Subsistemas independentes: estrutura e veículo.

O vector \underline{X}_X representa as reacções nos graus de liberdade com interacção do veículo, \underline{u}_X os respectivos deslocamentos nodais, \underline{Y}_Y as forças de interacção que actuam na estrutura e \underline{u}_Y os deslocamentos nos pontos da estrutura onde actuam as forças de interacção, segundo as respectivas direcções. Os pontos da estrutura onde actuam as forças de interacção não são pontos nodais do sistema mas sim pontos no interior dos elementos finitos que constituem a estrutura. Por esse motivo, os graus de liberdade associados a esses pontos não pertencem à equação de equilíbrio dinâmico do sistema.

3.3.2 Compatibilização de deslocamentos

Em cada instante t , a compatibilização dos deslocamentos nos pontos de contacto entre a estrutura e o veículo é efectuada por intermédio de um processo iterativo, caracterizado pelos seguintes passos em cada iteração i :

- 1) Determinação dos assentamentos de apoio nos graus de liberdade com interacção do veículo (\underline{u}_X^i). A equação de compatibilidade dos deslocamentos associados aos graus de liberdade com interacção para o instante t é definida por

$$\underline{u}_X^i(t) - \underline{u}_Y^{i-1}(t) = \underline{g}_X(t) \quad (3.6)$$

em que \underline{g}_X são eventuais folgas existentes entre os dois subsistemas. As respectivas velocidades e acelerações são definidas por

$$\dot{\underline{u}}_X^i(t) = \dot{\underline{u}}_Y^{i-1}(t) \quad (3.7)$$

$$\ddot{\underline{u}}_X^i(t) = \ddot{\underline{u}}_Y^{i-1}(t) \quad (3.8)$$

Na primeira iteração, os deslocamentos da estrutura segundo os graus de liberdade com interacção ($\underline{u}_Y^{i-1}(t)$) são iguais aos respectivos deslocamentos calculados no instante anterior ($\underline{u}_Y(t - \Delta t)$).

- 2) Resolução do subsistema relativo ao veículo e determinação das reacções nos graus de liberdade com interacção do veículo ($\underline{X}_X^i(t)$).
- 3) Determinação das forças de interacção que actuam na estrutura $\underline{Y}_Y^i(t)$. A equação de equilíbrio das forças associadas aos graus de liberdade com interacção é definida por

$$\underline{Y}_Y^i(t) = -\underline{X}_X^i(t) \quad (3.9)$$

- 4) As forças de interacção $\underline{Y}_Y^i(t)$ são aplicadas na estrutura. Da resolução do subsistema de equações relativo à estrutura obtêm-se os seus deslocamentos nodais e posteriormente as respectivas velocidades e acelerações. Os

deslocamentos de cada ponto de contacto, segundo os graus de liberdade com interacção (Y), são obtidos por intermédio das funções de forma e deslocamentos nodais de cada elemento finito que contém os pontos de contacto. As velocidades e acelerações são calculadas com base nos deslocamentos.

- 5) No final de cada iteração, o critério de convergência é baseado na comparação das forças de interacção que actuam na estrutura ($\underline{Y}_Y(t)$), calculadas na iteração corrente e na anterior. O critério de convergência é definido pelo quociente

$$\frac{\underline{Y}_Y^i(t) - \underline{Y}_Y^{i-1}(t)}{\underline{Y}_Y^{i-1}(t)} \leq Tolerância \quad (3.10)$$

Se o critério de convergência for respeitado considera-se que os dois subsistemas foram compatibilizados e avança-se para o instante seguinte. Caso contrário, avança-se para uma nova iteração de compatibilização veículo-estrutura.

3.4 MÉTODO DIRECTO

Nesta secção apresenta-se um novo algoritmo para analisar a interacção veículo-estrutura desenvolvido por Azevedo *et al.* (2007). O referido algoritmo foi implementado no programa de cálculo automático FEMIX 4.0 (Azevedo *et al.*, 2003). As equações de equilíbrio dinâmico em graus de liberdade não prescritos (livres), em graus de liberdade com contacto e em graus de liberdade prescritos são desenvolvidas separadamente. A equação de compatibilidade de deslocamentos entre os pontos do veículo e os pontos da estrutura é também desenvolvida separadamente. O conjunto das equações de equilíbrio dinâmico e de compatibilidade de deslocamentos constitui um único sistema de equações, cujas incógnitas são deslocamentos, forças de interacção e reacções. Dado que as incógnitas do referido sistema de equações são deslocamentos e forças, este passa a ser designado sistema de equações misto. O sistema de equações misto pode ser resolvido de forma eficiente e directa mediante a consideração de diversas submatrizes

com características específicas. Por esse motivo, este algoritmo é designado por *método directo*.

Na Figura 3.7 encontra-se representado, para o instante corrente ($t + \Delta t$), um sistema veículo-estrutura que serve como exemplo para introduzir os tipos de graus de liberdade que são considerados na formulação do método directo. O sistema é composto por uma estrutura constituída por dois vãos simplesmente apoiados ($B1$ e $B2$) e um veículo constituído por dois elementos ($B3$ e $B4$). Os nós 7, 8 e 9 são pontos internos da barra $B1$. A localização destes nós pode variar entre intervalos de tempo, dependendo da posição do veículo. Eventuais folgas existentes entre as duas estruturas (g_i) podem ser facilmente consideradas nas equações de compatibilidade de deslocamentos, conforme é demonstrado na secção 3.4.2.

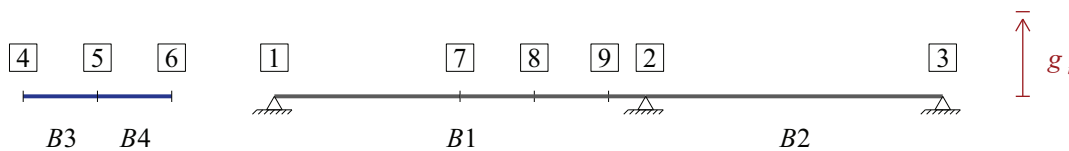


Figura 3.7 – Veículo e estrutura: barras e pontos nodais.

São considerados dois deslocamentos em cada ponto nodal (deslocamento vertical e rotação). Na Figura 3.8 encontram-se representados os deslocamentos dos pontos nodais (1 a 12), os deslocamentos dos pontos de contacto da estrutura (13, 14 e 15), as forças de interacção que actuam no veículo (X_7 , X_9 e X_{11}) e as forças de interacção que actuam na estrutura (Y_{13} , Y_{14} e Y_{15}). Apenas é considerada a interacção entre os graus de liberdade de translação.

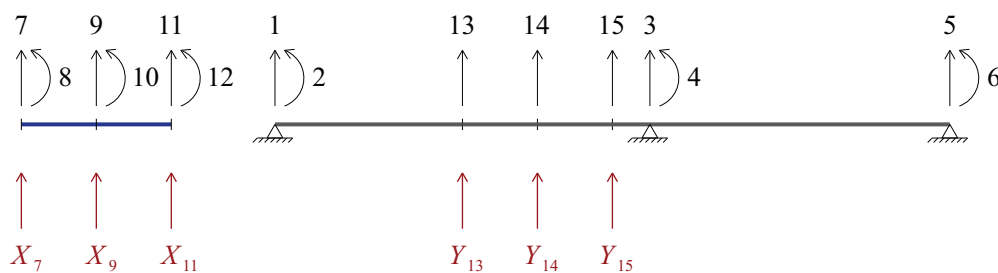


Figura 3.8 – Veículo e estrutura: graus de liberdade e forças de interacção.

A classificação de graus de liberdade considerada é apresentada no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – Classificação de graus de liberdade.

<i>I</i>	livres e independentes (sem interacção)
<i>X</i>	livres, mas sujeitos a interacção (pertencem ao veículo)
<i>F</i>	livres (<i>free</i>): incluem os graus de liberdade do tipo <i>I</i> e <i>X</i> ($F = I + X$)
<i>P</i>	prescritos (<i>prescribed</i>)
<i>Y</i>	interacção (pertencem à estrutura)

3.4.1 Equação de equilíbrio dinâmico

No contexto do método- α (ver secção 2.4.2), a equação de equilíbrio dinâmico que engloba os graus de liberdade nos pontos nodais (1 a 12) é definida por

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}^c + (1+\alpha) \underline{C} \dot{\underline{u}}^c - \alpha \underline{C} \dot{\underline{u}}^p + (1+\alpha) \underline{K} \underline{u}^c - \alpha \underline{K} \underline{u}^p = (1+\alpha) \underline{F}^c - \alpha \underline{F}^p \quad (3.11)$$

sendo α o parâmetro associado ao método- α . O índice *c* (*current*) indica o instante corrente ($t + \Delta t$) e o índice *p* (*previous*) indica o instante anterior (t).

De acordo com a Figura 3.8 e com a classificação indicada no Quadro 3.2, os graus de liberdade do tipo *F* são os seguintes: 2, 4, 6 e 7 a 12. Os graus de liberdade do tipo *I* são: 2, 4, 6, 8, 10 e 12. Os graus de liberdade do tipo *X* correspondem aos “apoios” do veículo e são os seguintes: 7, 9 e 11. Os graus de liberdade do tipo *P* são os apoios estruturais 1, 3 e 5. Os graus de liberdade 13, 14 e 15 são do tipo *Y* e consistem nos deslocamentos internos da barra *B1* nos pontos de contacto.

De acordo com a classificação de graus de liberdade definida no Quadro 3.2 e considerando diversas submatrizes, é possível expandir a equação (3.11), obtendo-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \underline{M}_{II} & \underline{M}_{IX} & \underline{M}_{IP} \\ \underline{M}_{XI} & \underline{M}_{XX} & \underline{M}_{XP} \\ \underline{M}_{PI} & \underline{M}_{PX} & \underline{M}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_I^c \\ \ddot{u}_X^c \\ \ddot{u}_P^c \end{bmatrix} \\
& + (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{C}_{II} & \underline{C}_{IX} & \underline{C}_{IP} \\ \underline{C}_{XI} & \underline{C}_{XX} & \underline{C}_{XP} \\ \underline{C}_{PI} & \underline{C}_{PX} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_I^c \\ \dot{u}_X^c \\ \dot{u}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{C}_{II} & \underline{C}_{IX} & \underline{C}_{IP} \\ \underline{C}_{XI} & \underline{C}_{XX} & \underline{C}_{XP} \\ \underline{C}_{PI} & \underline{C}_{PX} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_I^p \\ \dot{u}_X^p \\ \dot{u}_P^p \end{bmatrix} \\
& + (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{K}_{II} & \underline{K}_{IX} & \underline{K}_{IP} \\ \underline{K}_{XI} & \underline{K}_{XX} & \underline{K}_{XP} \\ \underline{K}_{PI} & \underline{K}_{PX} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I^c \\ u_X^c \\ u_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{K}_{II} & \underline{K}_{IX} & \underline{K}_{IP} \\ \underline{K}_{XI} & \underline{K}_{XX} & \underline{K}_{XP} \\ \underline{K}_{PI} & \underline{K}_{PX} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I^p \\ u_X^p \\ u_P^p \end{bmatrix} = \\
& (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{P}_I^c + \underline{d}_{IY} \underline{Y}_Y^c \\ \underline{P}_X^c + \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c \\ \underline{P}_P^c + \underline{d}_{PY} \underline{Y}_Y^c + \underline{R}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{P}_I^p + \underline{d}_{IY} \underline{Y}_Y^p \\ \underline{P}_X^p + \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^p \\ \underline{P}_P^p + \underline{d}_{PY} \underline{Y}_Y^p + \underline{R}_P^p \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Nos graus de liberdade do tipo I

$$\underline{F}_I = \underline{P}_I + \underline{d}_{IY} \underline{Y}_Y \tag{3.13}$$

sendo \underline{P} as forças exteriores aplicadas em correspondência com cada grau de liberdade. Cada componente d_{ij} de \underline{d}_{IY} corresponde à força nodal equivalente segundo o grau de liberdade i , do tipo I , quando actua apenas uma força unitária segundo o grau de liberdade j , do tipo Y (ver Figura 3.8).

Nos graus de liberdade do tipo X

$$\underline{F}_X = \underline{P}_X + \underline{I}_{XX} \underline{X}_X \tag{3.14}$$

sendo \underline{I}_{XX} a matriz identidade.

Nos graus de liberdade do tipo P

$$\underline{F}_P = \underline{P}_P + \underline{d}_{PY} \underline{Y}_Y + \underline{R}_P \tag{3.15}$$

sendo \underline{R}_P as reacções.

De acordo com a Figura 3.8, as equações de equilíbrio nos graus de liberdade com interacção são

$$\underline{Y}_Y = -\underline{X}_X \quad (3.16)$$

Atendendo a que o número de graus de liberdade Y é igual ao número de graus de liberdade X , é possível substituir o índice Y por X .

Substituindo (3.16) em (3.12), chega-se a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \underline{M}_{II} & \underline{M}_{IX} & \underline{M}_{IP} \\ \underline{M}_{XI} & \underline{M}_{XX} & \underline{M}_{XP} \\ \underline{M}_{PI} & \underline{M}_{PX} & \underline{M}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}}_I^c \\ \ddot{\underline{u}}_X^c \\ \ddot{\underline{u}}_P^c \end{bmatrix} + (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{C}_{II} & \underline{C}_{IX} & \underline{C}_{IP} \\ \underline{C}_{XI} & \underline{C}_{XX} & \underline{C}_{XP} \\ \underline{C}_{PI} & \underline{C}_{PX} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}_I^c \\ \dot{\underline{u}}_X^c \\ \dot{\underline{u}}_P^c \end{bmatrix} \\ & - \alpha \begin{bmatrix} \underline{C}_{II} & \underline{C}_{IX} & \underline{C}_{IP} \\ \underline{C}_{XI} & \underline{C}_{XX} & \underline{C}_{XP} \\ \underline{C}_{PI} & \underline{C}_{PX} & \underline{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}_I^p \\ \dot{\underline{u}}_X^p \\ \dot{\underline{u}}_P^p \end{bmatrix} + (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{K}_{II} & \underline{K}_{IX} & \underline{K}_{IP} \\ \underline{K}_{XI} & \underline{K}_{XX} & \underline{K}_{XP} \\ \underline{K}_{PI} & \underline{K}_{PX} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I^c \\ \underline{u}_X^c \\ \underline{u}_P^c \end{bmatrix} \\ & - \alpha \begin{bmatrix} \underline{K}_{II} & \underline{K}_{IX} & \underline{K}_{IP} \\ \underline{K}_{XI} & \underline{K}_{XX} & \underline{K}_{XP} \\ \underline{K}_{PI} & \underline{K}_{PX} & \underline{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I^p \\ \underline{u}_X^p \\ \underline{u}_P^p \end{bmatrix} = (1+\alpha) \begin{bmatrix} \underline{P}_I^c \\ \underline{P}_X^c \\ \underline{P}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \underline{P}_I^p \\ \underline{P}_X^p \\ \underline{P}_P^p \end{bmatrix} \\ & + (1+\alpha) \begin{bmatrix} -\underline{d}_{IX} \\ \underline{I}_{XX} \\ -\underline{d}_{PX} \end{bmatrix} \underline{X}_X^c - \alpha \begin{bmatrix} -\underline{d}_{IX} \\ \underline{I}_{XX} \\ -\underline{d}_{PX} \end{bmatrix} \underline{X}_X^p + (1+\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{R}_P^c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{R}_P^p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desenvolvendo (3.17) obtêm-se as seguintes equações

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{II} \ddot{\underline{u}}_I^c + \underline{M}_{IX} \ddot{\underline{u}}_X^c + \underline{M}_{IP} \ddot{\underline{u}}_P^c \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \dot{\underline{u}}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \dot{\underline{u}}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{IP} \dot{\underline{u}}_P^c \\ & - \alpha \underline{C}_{II} \dot{\underline{u}}_I^p - \alpha \underline{C}_{IX} \dot{\underline{u}}_X^p - \alpha \underline{C}_{IP} \dot{\underline{u}}_P^p \\ & + (1+\alpha) \underline{K}_{II} \underline{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} \underline{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{K}_{IP} \underline{u}_P^c \\ & - \alpha \underline{K}_{II} \underline{u}_I^p - \alpha \underline{K}_{IX} \underline{u}_X^p - \alpha \underline{K}_{IP} \underline{u}_P^p = \\ & (1+\alpha) \underline{P}_I^c - \alpha \underline{P}_I^p - (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c + \alpha \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^p \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{XI} \ddot{u}_I^c + \underline{M}_{XX} \ddot{u}_X^c + \underline{M}_{XP} \ddot{u}_P^c \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \dot{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \dot{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XP} \dot{u}_P^c \\
& - \alpha \underline{C}_{XI} \dot{u}_I^p - \alpha \underline{C}_{XX} \dot{u}_X^p - \alpha \underline{C}_{XP} \dot{u}_P^p \\
& + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} u_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} u_X^c + (1+\alpha) \underline{K}_{XP} u_P^c \\
& - \alpha \underline{K}_{XI} u_I^p - \alpha \underline{K}_{XX} u_X^p - \alpha \underline{K}_{XP} u_P^p = \\
& (1+\alpha) \underline{P}_X^c - \alpha \underline{P}_X^p + (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c - \alpha \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^p
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{PI} \ddot{u}_I^c + \underline{M}_{PX} \ddot{u}_X^c + \underline{M}_{PP} \ddot{u}_P^c \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{PI} \dot{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{PX} \dot{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{PP} \dot{u}_P^c \\
& - \alpha \underline{C}_{PI} \dot{u}_I^p - \alpha \underline{C}_{PX} \dot{u}_X^p - \alpha \underline{C}_{PP} \dot{u}_P^p \\
& + (1+\alpha) \underline{K}_{PI} u_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{PX} u_X^c + (1+\alpha) \underline{K}_{PP} u_P^c \\
& - \alpha \underline{K}_{PI} u_I^p - \alpha \underline{K}_{PX} u_X^p - \alpha \underline{K}_{PP} u_P^p = \\
& (1+\alpha) \underline{P}_P^c - \alpha \underline{P}_P^p - (1+\alpha) \underline{d}_{PX} \underline{X}_X^c + \alpha \underline{d}_{PX} \underline{X}_X^p + (1+\alpha) \underline{R}_P^c - \alpha \underline{R}_P^p
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Colocando no primeiro membro todos os termos que contêm incógnitas, as equações (3.18) e (3.19) passam a ser

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{II} \ddot{u}_I^c + \underline{M}_{IX} \ddot{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \dot{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \dot{u}_X^c \\
& + (1+\alpha) \underline{K}_{II} u_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} u_X^c + (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c = \\
& (1+\alpha) \underline{P}_I^c - \alpha \underline{P}_I^p + \alpha \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^p - \underline{M}_{IP} \ddot{u}_P^c \\
& - (1+\alpha) \underline{C}_{IP} \dot{u}_P^c + \alpha \underline{C}_{II} \dot{u}_I^p + \alpha \underline{C}_{IX} \dot{u}_X^p + \alpha \underline{C}_{IP} \dot{u}_P^p \\
& - (1+\alpha) \underline{K}_{IP} u_P^c + \alpha \underline{K}_{II} u_I^p + \alpha \underline{K}_{IX} u_X^p + \alpha \underline{K}_{IP} u_P^p
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{XI} \ddot{u}_I^c + \underline{M}_{XX} \ddot{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \dot{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \dot{u}_X^c \\
& + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} u_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} u_X^c - (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c = \\
& (1+\alpha) \underline{P}_X^c - \alpha \underline{P}_X^p - \alpha \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^p - \underline{M}_{XP} \ddot{u}_P^c \\
& - (1+\alpha) \underline{C}_{XP} \dot{u}_P^c + \alpha \underline{C}_{XI} \dot{u}_I^p + \alpha \underline{C}_{XX} \dot{u}_X^p + \alpha \underline{C}_{XP} \dot{u}_P^p \\
& - (1+\alpha) \underline{K}_{XP} u_P^c + \alpha \underline{K}_{XI} u_I^p + \alpha \underline{K}_{XX} u_X^p + \alpha \underline{K}_{XP} u_P^p
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Após a resolução do sistema de equações lineares, apenas as reacções do instante corrente permanecem como incógnitas, podendo ser calculadas com

$$\begin{aligned}
\underline{R}_P^c &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{R}_P^p - \underline{P}_P^c + \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{P}_P^p + \underline{d}_{PX} \underline{X}_X^c - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{d}_{PX} \underline{X}_X^p \\
&\quad + \frac{1}{1+\alpha} \underline{M}_{PI} \ddot{\underline{u}}_I^c + \frac{1}{1+\alpha} \underline{M}_{PX} \ddot{\underline{u}}_X^c + \frac{1}{1+\alpha} \underline{M}_{PP} \ddot{\underline{u}}_P^c \\
&\quad + \underline{C}_{PI} \dot{\underline{u}}_I^c + \underline{C}_{PX} \dot{\underline{u}}_X^c + \underline{C}_{PP} \dot{\underline{u}}_P^c - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{C}_{PI} \dot{\underline{u}}_I^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{C}_{PX} \dot{\underline{u}}_X^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{C}_{PP} \dot{\underline{u}}_P^p \\
&\quad + \underline{K}_{PI} \underline{u}_I^c + \underline{K}_{PX} \underline{u}_X^c + \underline{K}_{PP} \underline{u}_P^c - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{K}_{PI} \underline{u}_I^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{K}_{PX} \underline{u}_X^p - \frac{\alpha}{1+\alpha} \underline{K}_{PP} \underline{u}_P^p
\end{aligned} \tag{3.23}$$

que é equivalente a (3.20).

A expressão (3.21) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\underline{M}_{II} \ddot{\underline{u}}_I^c + \underline{M}_{IX} \ddot{\underline{u}}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \dot{\underline{u}}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \dot{\underline{u}}_X^c \\
&+ (1+\alpha) \underline{K}_{II} \underline{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} \underline{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c = \overline{\overline{F}}_I
\end{aligned} \tag{3.24}$$

sendo $\overline{\overline{F}}_I$ definido por

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{F}}_I &= (1+\alpha) \underline{P}_I^c - \alpha \underline{P}_I^p + \alpha \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^p - \underline{M}_{IP} \ddot{\underline{u}}_P^c \\
&\quad - (1+\alpha) \underline{C}_{IP} \dot{\underline{u}}_P^c + \alpha \underline{C}_{II} \dot{\underline{u}}_I^p + \alpha \underline{C}_{IX} \dot{\underline{u}}_X^p + \alpha \underline{C}_{IP} \dot{\underline{u}}_P^p \\
&\quad - (1+\alpha) \underline{K}_{IP} \underline{u}_P^c + \alpha \underline{K}_{II} \underline{u}_I^p + \alpha \underline{K}_{IX} \underline{u}_X^p + \alpha \underline{K}_{IP} \underline{u}_P^p
\end{aligned} \tag{3.25}$$

A velocidade e o deslocamento no instante corrente ($t + \Delta t$), nos graus de liberdade do tipo I , são definidos por (Clough & Penzien, 1993)

$$\dot{\underline{u}}_I^c = \dot{\underline{u}}_I^p + \left[(1-\gamma) \ddot{\underline{u}}_I^p + \gamma \ddot{\underline{u}}_I^c \right] \Delta t \tag{3.26}$$

$$\underline{u}_I^c = \underline{u}_I^p + \dot{\underline{u}}_I^p \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\underline{u}}_I^p + \beta \ddot{\underline{u}}_I^c \right] \Delta t^2 \tag{3.27}$$

Por analogia com (2.103) e (2.107), tem-se

$$\ddot{\underline{u}}_I^c = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_I^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_I^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_I^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \tag{3.28}$$

$$\dot{\underline{u}}_I^c = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_I^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_I^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_I^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \tag{3.29}$$

$$\ddot{u}_x^c = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_x^c - \frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_x^p - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\underline{u}}_x^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_x^p \quad (3.30)$$

$$\dot{\underline{u}}_x^c = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_x^c - \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_x^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_x^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_x^p \quad (3.31)$$

Substituindo (3.28), (3.29), (3.30) e (3.31) em (3.24), obtém-se

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{II} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_I^c - \frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_I^p - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\underline{u}}_I^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\ & + \underline{M}_{IX} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_X^c - \frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_X^p - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\underline{u}}_X^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_I^c - \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_I^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_I^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_X^c - \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_X^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_X^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{K}_{II} \underline{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} \underline{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c = \overline{\overline{F}}_I \end{aligned} \quad (3.32)$$

Colocando \underline{u}_I^c e \underline{u}_X^c em evidência, resulta

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{M}_{II} + (1+\alpha) \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{C}_{II} + (1+\alpha) \underline{K}_{II} \right] \underline{u}_I^c \\ & + \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{M}_{IX} + (1+\alpha) \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{C}_{IX} + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} \right] \underline{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c = \\ & \overline{\overline{F}}_I + \underline{M}_{II} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_I^p + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\underline{u}}_I^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\ & + \underline{M}_{IX} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \underline{u}_X^p + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\underline{u}}_X^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_I^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_I^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \underline{u}_X^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_X^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\bar{K}}_{II} \underline{u}_I^c + \underline{\bar{K}}_{IX} \underline{u}_X^c + (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \underline{X}_X^c = \underline{\bar{F}}_I \quad (3.34)$$

sendo

$$\underline{\bar{K}}_{II} = A_0 \underline{M}_{II} + (1+\alpha) A_1 \underline{C}_{II} + (1+\alpha) \underline{K}_{II} \quad (3.35)$$

$$\underline{\bar{K}}_{IX} = A_0 \underline{M}_{IX} + (1+\alpha) A_1 \underline{C}_{IX} + (1+\alpha) \underline{K}_{IX} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \underline{\bar{F}}_I = & \underline{\bar{F}}_I + \underline{M}_{II} \left[A_0 \underline{u}_I^p + A_2 \underline{\dot{u}}_I^p + A_3 \underline{\ddot{u}}_I^p \right] + \underline{M}_{IX} \left[A_0 \underline{u}_X^p + A_2 \underline{\dot{u}}_X^p + A_3 \underline{\ddot{u}}_X^p \right] \\ & + (1+\alpha) \underline{C}_{II} \left[A_1 \underline{u}_I^p + A_4 \underline{\dot{u}}_I^p + A_5 \underline{\ddot{u}}_I^p \right] + (1+\alpha) \underline{C}_{IX} \left[A_1 \underline{u}_X^p + A_4 \underline{\dot{u}}_X^p + A_5 \underline{\ddot{u}}_X^p \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$A_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad A_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad A_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} \quad (3.38)$$

$$A_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad A_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad A_5 = \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right)$$

Na equação (3.34), $\underline{\bar{K}}$ é a matriz de rigidez efectiva e $\underline{\bar{F}}$ as forças efectivas.

A equação (3.22) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{XI} \underline{\ddot{u}}_I^c + \underline{M}_{XX} \underline{\ddot{u}}_X^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \underline{\dot{u}}_I^c + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \underline{\dot{u}}_X^c \\ & + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} \underline{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} \underline{u}_X^c - (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c = \underline{\bar{F}}_X \end{aligned} \quad (3.39)$$

sendo $\underline{\bar{F}}_X$ definido por

$$\begin{aligned} \underline{\bar{F}}_X = & (1+\alpha) \underline{P}_X^c - \alpha \underline{P}_X^p - \alpha \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^p - \underline{M}_{XP} \underline{\ddot{u}}_P^c \\ & - (1+\alpha) \underline{C}_{XP} \underline{\dot{u}}_P^c + \alpha \underline{C}_{XI} \underline{\dot{u}}_I^p + \alpha \underline{C}_{XX} \underline{\dot{u}}_X^p + \alpha \underline{C}_{XP} \underline{\dot{u}}_P^p \\ & - (1+\alpha) \underline{K}_{XP} \underline{u}_P^c + \alpha \underline{K}_{XI} \underline{u}_I^p + \alpha \underline{K}_{XX} \underline{u}_X^p + \alpha \underline{K}_{XP} \underline{u}_P^p \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo (3.28), (3.29), (3.30) e (3.31) em (3.39), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \underline{M}_{XI} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_I^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_I^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_I^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\
& + \underline{M}_{XX} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_X^c - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_X^p - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_X^p - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_I^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_I^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_I^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_X^c - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_X^p + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\underline{u}}_X^p + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} \underline{u}_I^c + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} \underline{u}_X^c - (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c = \overline{\overline{F}}_X
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Colocando \underline{u}_I^c e \underline{u}_X^c em evidência, resulta

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M}_{XI} + (1+\alpha) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{C}_{XI} + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} \right] \underline{u}_I^c \\
& + \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{M}_{XX} + (1+\alpha) \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{C}_{XX} + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} \right] \underline{u}_X^c - (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c = \\
& \overline{\overline{F}}_X + \underline{M}_{XI} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_I^p + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_I^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\
& + \underline{M}_{XX} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{u}_X^p + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\underline{u}}_X^p + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_I^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_I^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_I^p \right] \\
& + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_X^p + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\underline{u}}_X^p + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_X^p \right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ou de um modo mais compacto

$$\overline{\overline{K}}_{XI} \underline{u}_I^c + \overline{\overline{K}}_{XX} \underline{u}_X^c - (1+\alpha) \underline{I}_{XX} \underline{X}_X^c = \overline{\overline{F}}_X \tag{3.43}$$

sendo

$$\overline{\overline{K}}_{XI} = A_0 \underline{M}_{XI} + (1+\alpha) A_1 \underline{C}_{XI} + (1+\alpha) \underline{K}_{XI} \tag{3.44}$$

$$\overline{\overline{K}}_{XX} = A_0 \underline{M}_{XX} + (1+\alpha) A_1 \underline{C}_{XX} + (1+\alpha) \underline{K}_{XX} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \bar{\underline{F}}_X = \bar{\underline{F}}_X + \underline{M}_{XI} \left[A_0 \underline{u}_I^p + A_2 \dot{\underline{u}}_I^p + A_3 \ddot{\underline{u}}_I^p \right] + \underline{M}_{XX} \left[A_0 \underline{u}_X^p + A_2 \dot{\underline{u}}_X^p + A_3 \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \\ + (1+\alpha) \underline{C}_{XI} \left[A_1 \underline{u}_I^p + A_4 \dot{\underline{u}}_I^p + A_5 \ddot{\underline{u}}_I^p \right] + (1+\alpha) \underline{C}_{XX} \left[A_1 \underline{u}_X^p + A_4 \dot{\underline{u}}_X^p + A_5 \ddot{\underline{u}}_X^p \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Os parâmetros A_0 a A_5 são definidos por (3.38).

Escrevendo as equações (3.34) e (3.43) em forma matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{\underline{K}}_{II} & \bar{\underline{K}}_{IX} & \bar{\underline{d}}_{IX} \\ \bar{\underline{K}}_{XI} & \bar{\underline{K}}_{XX} & \bar{\underline{I}}_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I^c \\ \underline{u}_X^c \\ \underline{X}_X^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{F}}_I \\ \bar{\underline{F}}_X \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

em que

$$\bar{\underline{d}}_{IX} = (1+\alpha) \underline{d}_{IX} \quad (3.48)$$

$$\bar{\underline{I}}_{XX} = -(1+\alpha) \underline{I}_{XX} \quad (3.49)$$

3.4.2 Equação de compatibilidade de deslocamentos

Para cada instante é necessário definir uma equação de compatibilidade dos deslocamentos segundo os graus de liberdade com interacção. Os deslocamentos do veículo são iguais aos correspondentes deslocamentos da estrutura, mais eventuais folgas que possam existir entre o veículo e a estrutura (ver Figura 3.7 e Figura 3.8). Deste modo, e para o instante corrente $(t + \Delta t)$, a equação de compatibilidade de deslocamentos é definida por

$$\underline{u}_X^c - \underline{u}_Y^c = \underline{g}_X^c \quad (3.50)$$

sendo

$$\underline{u}_Y^c = \underline{c}_{YI} \underline{u}_I^c + \underline{c}_{YP} \underline{u}_P^c + \underline{f}_{YY} \underline{Y}_Y^c \quad (3.51)$$

Na equação (3.51), cada componente c_{ij} de \underline{c}_{YI} corresponde ao deslocamento segundo o grau de liberdade i , do tipo Y , quando actua apenas um deslocamento imposto unitário segundo o grau de liberdade j , do tipo I (ver Figura 3.8). As componentes da

matriz \underline{c}_{YP} têm um significado idêntico. Cada componente f_{ij} de \underline{f}_{YY} corresponde ao deslocamento segundo o grau de liberdade i , do tipo Y , quando actua apenas uma força unitária segundo o grau de liberdade j , do tipo Y (ver Figura 3.8). Para determinar as componentes da matriz \underline{f}_{YY} assume-se que os deslocamentos segundo os graus de liberdade do tipo I e P são nulos. Nos elementos finitos cuja formulação é baseada na teoria das vigas, a matriz \underline{f}_{YY} assume valores não nulos. No caso dos elementos finitos cuja formulação é baseada nas funções de forma, a matriz \underline{f}_{YY} é nula.

Atendendo a que o número de graus de liberdade Y é igual ao número de graus de liberdade X , é possível substituir o índice Y por X . Substituindo (3.16) em (3.51), obtém-se

$$\underline{u}_Y^c = \underline{c}_{XI} \underline{u}_I^c + \underline{c}_{XP} \underline{u}_P^c - \underline{f}_{XX} \underline{X}_X^c \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.50) e reordenando os termos, tem-se

$$-\underline{c}_{XI} \underline{u}_I^c + \underline{u}_X^c + \underline{f}_{XX} \underline{X}_X^c = \underline{g}_X^c + \underline{c}_{XP} \underline{u}_P^c \quad (3.53)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.53) pela constante $-(1 + \alpha)$, resulta

$$(1 + \alpha) \underline{c}_{XI} \underline{u}_I^c - (1 + \alpha) \underline{u}_X^c - (1 + \alpha) \underline{f}_{XX} \underline{X}_X^c = -(1 + \alpha) \underline{g}_X^c - (1 + \alpha) \underline{c}_{XP} \underline{u}_P^c \quad (3.54)$$

3.4.3 Sistema de equações misto

O sistema de equações misto é constituído pelo conjunto das equações de equilíbrio dinâmico (3.47) e de compatibilidade de deslocamentos (3.54). Reescrevendo as referidas equações em forma matricial resulta

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{II} & \overline{K}_{IX} & \overline{d}_{IX} \\ \overline{K}_{XI} & \overline{K}_{XX} & \overline{I}_{XX} \\ \overline{c}_{XI} & \overline{I}_{XX} & \overline{f}_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I^c \\ \underline{u}_X^c \\ \underline{X}_X^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{F}_I \\ \overline{F}_X \\ \underline{g}_X \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

sendo

$$\overline{c}_{XI} = (1 + \alpha) \underline{c}_{XI} \quad (3.56)$$

$$\bar{I}_{XX} = -(1 + \alpha) I_{XX} \quad (3.57)$$

$$\bar{f}_{XX} = -(1 + \alpha) f_{XX} \quad (3.58)$$

$$\bar{g}_X = -(1 + \alpha) g_X^c - (1 + \alpha) c_{XP} u_P^c \quad (3.59)$$

Na equação (3.55), \bar{g}_X são as folgas efectivas.

3.4.4 Exemplos

3.4.4.1 Contacto entre ponto e elemento

Nesta secção apresenta-se um exemplo numérico simples para ilustrar a formulação utilizada no contacto entre um ponto nodal e a superfície de um elemento (ver Figura 3.9). Para simplificar as expressões envolvidas na formulação utilizada apenas são considerados os efeitos estáticos. No lado direito da Figura 3.9 encontra-se representada uma viga constituída por dois vãos simplesmente apoiados ($B1$ e $B2$) que é sujeita ao contacto do veículo representado no lado esquerdo da mesma figura. O veículo é constituído por duas barras ($B3$ e $B4$). Os nós 7, 8 e 9 são pontos internos da barra $B1$. As propriedades das barras encontram-se especificadas no Quadro 3.3. Cada componente g_i corresponde à folga existente entre um ponto do veículo e o respectivo ponto da estrutura.

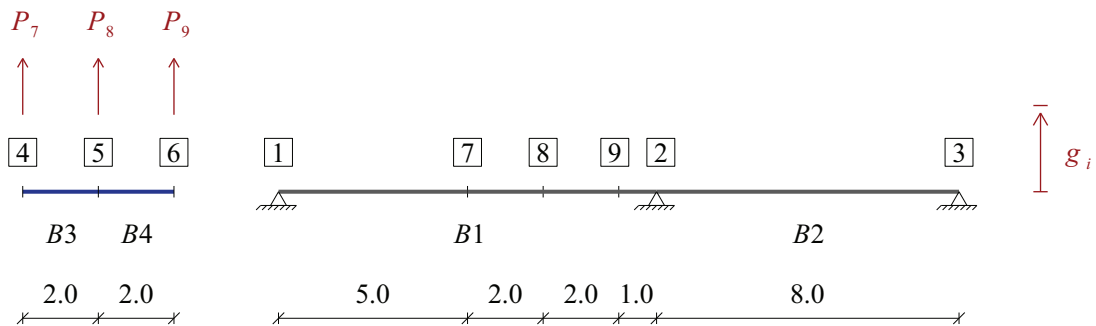


Figura 3.9 – Barras, pontos nodais e forças exteriores (unidades em metros).

Quadro 3.3 – Propriedades das barras *B1* a *B4*.

	<i>B1, B2</i>	<i>B3, B4</i>	Unidades
<i>B</i>	1.0	0.4	m
<i>H</i>	0.6	0.3	m
<i>A</i>	0.6	0.12	m ²
<i>I</i>	0.018	0.0009	m ⁴
<i>E</i>	20×10^3	200×10^3	MPa

As forças exteriores aplicadas no veículo encontram-se definidas no Quadro 3.4.

Quadro 3.4 – Forças exteriores.

Força	Valor (MN)
P_7	-2
P_8	-4
P_9	-5

São considerados dois deslocamentos em cada ponto nodal (deslocamento vertical e rotação). Na Figura 3.10 encontram-se representados os graus de liberdade do tipo *F* e *Y* (ver Quadro 3.2), as forças de interacção que actuam no veículo (X_7 , X_8 e X_9) e as forças de interacção que actuam na estrutura (Y_{10} , Y_{11} e Y_{12}). Neste exemplo, considera-se apenas a interacção entre os graus de liberdade de translação.

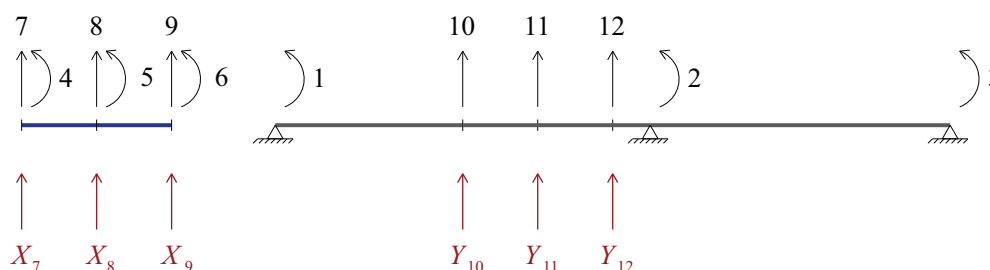


Figura 3.10 – Graus de liberdade e forças de interacção.

Os graus de liberdade estão divididos nos seguintes grupos:

- *I* – 1 a 6
- *X* – 7 a 9

- $F - 1$ a 9
- $Y - 10$ a 12

De acordo com a Figura 3.10, é possível estabelecer as seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{cases} X_7 + Y_{10} = 0 \\ X_8 + Y_{11} = 0 \\ X_9 + Y_{12} = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} Y_{10} = -X_7 \\ Y_{11} = -X_8 \\ Y_{12} = -X_9 \end{cases} \quad (3.61)$$

As forças aplicadas são definidas por

$$\begin{cases} F_1 = -d_{1,10} X_7 - d_{1,11} X_8 - d_{1,12} X_9 \\ F_2 = -d_{2,10} X_7 - d_{2,11} X_8 - d_{2,12} X_9 \\ F_3 = 0 \\ F_4 = 0 \\ F_5 = 0 \\ F_6 = 0 \\ F_7 = P_7 + X_7 \\ F_8 = P_8 + X_8 \\ F_9 = P_9 + X_9 \end{cases} \quad (3.62)$$

Cada componente d_{ij} corresponde à força nodal equivalente segundo o grau de liberdade i , do tipo I , quando actua apenas uma força unitária segundo o grau de liberdade j , do tipo Y (ver Figura 3.10).

Substituindo (3.61) em (3.62), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = -d_{1,10} X_7 - d_{1,11} X_8 - d_{1,12} X_9 \\ F_2 = -d_{2,10} X_7 - d_{2,11} X_8 - d_{2,12} X_9 \\ F_3 = 0 \\ F_4 = 0 \\ F_5 = 0 \\ F_6 = 0 \\ F_7 = P_7 + X_7 \\ F_8 = P_8 + X_8 \\ F_9 = P_9 + X_9 \end{array} \right. \quad (3.63)$$

A equação de compatibilidade dos deslocamentos associados aos graus de liberdade com interacção é expressa por

$$\left\{ \begin{array}{l} a_7 - a_{10} = g_7 \\ a_8 - a_{11} = g_8 \\ a_9 - a_{12} = g_9 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Os deslocamentos segundo os graus de liberdade do tipo Y são definidos por

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = c_{10,1} a_1 + c_{10,2} a_2 + f_{10,10} Y_{10} + f_{10,11} Y_{11} + f_{10,12} Y_{12} \\ a_{11} = c_{11,1} a_1 + c_{11,2} a_2 + f_{11,10} Y_{10} + f_{11,11} Y_{11} + f_{11,12} Y_{12} \\ a_{12} = c_{12,1} a_1 + c_{12,2} a_2 + f_{12,10} Y_{10} + f_{12,11} Y_{11} + f_{12,12} Y_{12} \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Nesta equação, cada componente c_{ij} corresponde ao deslocamento segundo o grau de liberdade i , do tipo Y , quando actua apenas um deslocamento imposto unitário segundo o grau de liberdade j , do tipo I (ver Figura 3.10). Cada componente f_{ij} corresponde ao deslocamento segundo o grau de liberdade i , do tipo Y , quando actua apenas uma força unitária segundo o grau de liberdade j , do tipo Y (ver Figura 3.10).

Substituindo (3.61) em (3.65), resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = c_{10,1} a_1 + c_{10,2} a_2 - f_{10,10} X_7 - f_{10,11} X_8 - f_{10,12} X_9 \\ a_{11} = c_{11,1} a_1 + c_{11,2} a_2 - f_{11,10} X_7 - f_{11,11} X_8 - f_{11,12} X_9 \\ a_{12} = c_{12,1} a_1 + c_{12,2} a_2 - f_{12,10} X_7 - f_{12,11} X_8 - f_{12,12} X_9 \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Por substituição de (3.66) em (3.64), chega-se a

$$\begin{cases} c_{10,1} a_1 + c_{10,2} a_2 - a_7 - f_{10,10} X_7 - f_{10,11} X_8 - f_{10,12} X_9 = -g_7 \\ c_{11,1} a_1 + c_{11,2} a_2 - a_8 - f_{11,10} X_7 - f_{11,11} X_8 - f_{11,12} X_9 = -g_8 \\ c_{12,1} a_1 + c_{12,2} a_2 - a_9 - f_{12,10} X_7 - f_{12,11} X_8 - f_{12,12} X_9 = -g_9 \end{cases} \quad (3.67)$$

A relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos é expressa por

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (3.68)$$

Substituindo (3.63) em (3.68), resulta

$$\begin{cases} K_{1,1} a_1 + \dots + K_{1,9} a_9 = -d_{1,10} X_7 - d_{1,11} X_8 - d_{1,12} X_9 \\ K_{2,1} a_1 + \dots + K_{2,9} a_9 = -d_{2,10} X_7 - d_{2,11} X_8 - d_{2,12} X_9 \\ K_{3,1} a_1 + \dots + K_{3,9} a_9 = 0 \\ K_{4,1} a_1 + \dots + K_{4,9} a_9 = 0 \\ K_{5,1} a_1 + \dots + K_{5,9} a_9 = 0 \\ K_{6,1} a_1 + \dots + K_{6,9} a_9 = 0 \\ K_{7,1} a_1 + \dots + K_{7,9} a_9 = P_7 + X_7 \\ K_{8,1} a_1 + \dots + K_{8,9} a_9 = P_8 + X_8 \\ K_{9,1} a_1 + \dots + K_{9,9} a_9 = P_9 + X_9 \end{cases} \quad (3.69)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} K_{1,1} a_1 + \dots + K_{1,9} a_9 + d_{1,10} X_7 + d_{1,11} X_8 + d_{1,12} X_9 = 0 \\ K_{2,1} a_1 + \dots + K_{2,9} a_9 + d_{2,10} X_7 + d_{2,11} X_8 + d_{2,12} X_9 = 0 \\ K_{3,1} a_1 + \dots + K_{3,9} a_9 = 0 \\ K_{4,1} a_1 + \dots + K_{4,9} a_9 = 0 \\ K_{5,1} a_1 + \dots + K_{5,9} a_9 = 0 \\ K_{6,1} a_1 + \dots + K_{6,9} a_9 = 0 \\ K_{7,1} a_1 + \dots + K_{7,9} a_9 - X_7 = P_7 \\ K_{8,1} a_1 + \dots + K_{8,9} a_9 - X_8 = P_8 \\ K_{9,1} a_1 + \dots + K_{9,9} a_9 - X_9 = P_9 \end{cases} \quad (3.70)$$

Rescrevendo as equações (3.67) e (3.70) em forma matricial, resulta

[illegible]

[illegible]

3.4.4.2 Contacto entre dois pontos

Nesta secção apresenta-se um exemplo numérico simples para ilustrar a formulação utilizada no contacto entre dois pontos nodais (ver Figura 3.11). Para simplificar as expressões envolvidas apenas são considerados os efeitos estáticos. No lado direito da Figura 3.11 encontra-se representada uma viga constituída por dois vãos simplesmente apoiados ($B1$ a $B4$), que é sujeita ao contacto do veículo representado no lado esquerdo da mesma figura. O veículo é constituído apenas pela barra $B5$. As propriedades das barras encontram-se especificadas no Quadro 3.5. Cada componente g_i corresponde à folga existente entre um ponto do veículo e o respectivo ponto da estrutura.

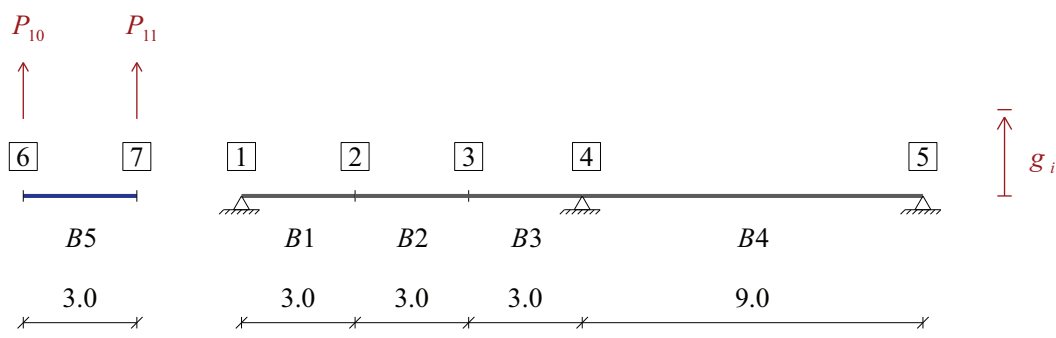


Figura 3.11 – Barras, pontos nodais e forças exteriores (unidades em metros).

Quadro 3.5 – Propriedades das barras $B1$ a $B5$.

	$B1$ a $B4$	$B5$	Unidades
B	1.0	0.4	m
H	0.6	0.3	m
A	0.6	0.12	m ²
I	0.018	0.0009	m ⁴
E	20×10^3	200×10^3	MPa

As forças exteriores aplicadas no veículo encontram-se definidas no Quadro 3.6.

Quadro 3.6 – Forças exteriores.

Força	Valor (MN)
P_{10}	-2
P_{11}	-4

São considerados dois deslocamentos em cada ponto nodal (deslocamento vertical e rotação). Na Figura 3.12 encontram-se representados os graus de liberdade do tipo F (ver Quadro 3.2), as forças de interacção que actuam no veículo (X_{10} e X_{11}) e as forças de interacção que actuam na estrutura (Y_2 e Y_4). Neste exemplo, considera-se apenas a interacção entre os graus de liberdade de translação.

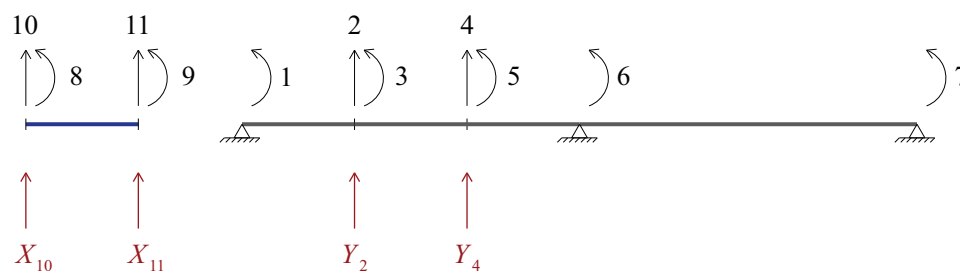


Figura 3.12 – Graus de liberdade e forças de interacção.

Os graus de liberdade estão divididos nos seguintes grupos:

- I – 1 a 9
- X – 10 e 11
- F – 1 a 11

De acordo com a Figura 3.12, é possível estabelecer as seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{cases} X_{10} + Y_2 = 0 \\ X_{11} + Y_4 = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} Y_2 = -X_{10} \\ Y_4 = -X_{11} \end{cases} \quad (3.74)$$

As forças aplicadas são expressas por

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = Y_2 \\ F_3 = 0 \\ F_4 = Y_4 \\ F_5 = 0 \\ F_6 = 0 \\ F_7 = 0 \\ F_8 = 0 \\ F_9 = 0 \\ F_{10} = P_{10} + X_{10} \\ F_{11} = P_{11} + X_{11} \end{cases} \quad (3.75)$$

Substituindo (3.74) em (3.75), resulta

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = -X_{10} \\ F_3 = 0 \\ F_4 = -X_{11} \\ F_5 = 0 \\ F_6 = 0 \\ F_7 = 0 \\ F_8 = 0 \\ F_9 = 0 \\ F_{10} = P_{10} + X_{10} \\ F_{11} = P_{11} + X_{11} \end{cases} \quad (3.76)$$

A equação de compatibilidade dos deslocamentos segundo os graus de liberdade com interacção é expressa por

$$\begin{cases} a_{10} - a_2 = g_2 \\ a_{11} - a_4 = g_4 \end{cases} \quad (3.77)$$

A relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos é expressa por

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (3.78)$$

Substituindo (3.76) em (3.78), resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{1,1} a_1 + \dots + K_{1,11} a_{11} = 0 \\ K_{2,1} a_1 + \dots + K_{2,11} a_{11} = -X_{10} \\ K_{3,1} a_1 + \dots + K_{3,11} a_{11} = 0 \\ K_{4,1} a_1 + \dots + K_{4,11} a_{11} = -X_{11} \\ K_{5,1} a_1 + \dots + K_{5,11} a_{11} = 0 \\ K_{6,1} a_1 + \dots + K_{6,11} a_{11} = 0 \\ K_{7,1} a_1 + \dots + K_{7,11} a_{11} = 0 \\ K_{8,1} a_1 + \dots + K_{8,11} a_{11} = 0 \\ K_{9,1} a_1 + \dots + K_{9,11} a_{11} = 0 \\ K_{10,1} a_1 + \dots + K_{10,11} a_{11} = P_{10} + X_{10} \\ K_{11,1} a_1 + \dots + K_{11,11} a_{11} = P_{11} + X_{11} \end{array} \right. \quad (3.79)$$

que é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{1,1} a_1 + \dots + K_{1,11} a_{11} = 0 \\ K_{2,1} a_1 + \dots + K_{2,11} a_{11} + X_{10} = 0 \\ K_{3,1} a_1 + \dots + K_{3,11} a_{11} = 0 \\ K_{4,1} a_1 + \dots + K_{4,11} a_{11} + X_{11} = 0 \\ K_{5,1} a_1 + \dots + K_{5,11} a_{11} = 0 \\ K_{6,1} a_1 + \dots + K_{6,11} a_{11} = 0 \\ K_{7,1} a_1 + \dots + K_{7,11} a_{11} = 0 \\ K_{8,1} a_1 + \dots + K_{8,11} a_{11} = 0 \\ K_{9,1} a_1 + \dots + K_{9,11} a_{11} = 0 \\ K_{10,1} a_1 + \dots + K_{10,11} a_{11} - X_{10} = P_{10} \\ K_{11,1} a_1 + \dots + K_{11,11} a_{11} - X_{11} = P_{11} \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Rescrevendo as equações (3.77) e (3.80) em forma matricial, obtém-se

(3.81)

I

X

X

$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{1,3}$	$K_{1,4}$	$K_{1,5}$	$K_{1,6}$	$K_{1,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{2,1}$	$K_{2,2}$	$K_{2,3}$	$K_{2,4}$	$K_{2,5}$	$K_{2,6}$	$K_{2,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$K_{3,3}$	$K_{3,4}$	$K_{3,5}$	$K_{3,6}$	$K_{3,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{4,1}$	$K_{4,2}$	$K_{4,3}$	$K_{4,4}$	$K_{4,5}$	$K_{4,6}$	$K_{4,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$K_{5,1}$	$K_{5,2}$	$K_{5,3}$	$K_{5,4}$	$K_{5,5}$	$K_{5,6}$	$K_{5,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{6,1}$	$K_{6,2}$	$K_{6,3}$	$K_{6,4}$	$K_{6,5}$	$K_{6,6}$	$K_{6,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{7,1}$	$K_{7,2}$	$K_{7,3}$	$K_{7,4}$	$K_{7,5}$	$K_{7,6}$	$K_{7,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{8,8}$	$K_{8,9}$	$K_{8,10}$	$K_{8,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{9,8}$	$K_{9,9}$	$K_{9,10}$	$K_{9,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{10,8}$	$K_{10,9}$	$K_{10,10}$	$K_{10,11}$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{11,8}$	$K_{11,9}$	$K_{11,10}$	$K_{11,11}$	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

I

X

X

$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{1,3}$	$K_{1,4}$	$K_{1,5}$	$K_{1,6}$	$K_{1,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{2,1}$	$K_{2,2}$	$K_{2,3}$	$K_{2,4}$	$K_{2,5}$	$K_{2,6}$	$K_{2,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$K_{3,1}$	$K_{3,2}$	$K_{3,3}$	$K_{3,4}$	$K_{3,5}$	$K_{3,6}$	$K_{3,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{4,1}$	$K_{4,2}$	$K_{4,3}$	$K_{4,4}$	$K_{4,5}$	$K_{4,6}$	$K_{4,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$K_{5,1}$	$K_{5,2}$	$K_{5,3}$	$K_{5,4}$	$K_{5,5}$	$K_{5,6}$	$K_{5,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{6,1}$	$K_{6,2}$	$K_{6,3}$	$K_{6,4}$	$K_{6,5}$	$K_{6,6}$	$K_{6,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$K_{7,1}$	$K_{7,2}$	$K_{7,3}$	$K_{7,4}$	$K_{7,5}$	$K_{7,6}$	$K_{7,7}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{8,8}$	$K_{8,9}$	$K_{8,10}$	$K_{8,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{9,8}$	$K_{9,9}$	$K_{9,10}$	$K_{9,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{10,8}$	$K_{10,9}$	$K_{10,10}$	$K_{10,11}$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$K_{11,8}$	$K_{11,9}$	$K_{11,10}$	$K_{11,11}$	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

X

X

X

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	X_{10}	X_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	P_{10}	P_{11}	- q_2	- q_4

X

X

X

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- q_2	- q_4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---------	---------

Substituindo as variáveis de (3.81) pelos seus valores, chega-se

[illegible]

3.4.5 Validação

Para validar a formulação proposta no método directo foi analisada uma viga simplesmente apoiada sujeita à passagem de uma massa suspensa. A resposta dinâmica é calculada por intermédio dos métodos directo e iterativo, descritos neste capítulo. Os resultados obtidos são também comparados com os resultados publicados por Calçada & Cunha (1998) e Bowe & Mullarkey (2005).

Na Figura 3.13 encontra-se representada uma viga simplesmente apoiada sujeita à passagem de uma massa suspensa. O modelo numérico da viga é composto por 50 elementos finitos de pórtico 2D.



Figura 3.13 – Viga simplesmente apoiada sujeita à passagem de uma massa suspensa.

As propriedades geométricas e mecânicas da viga são baseadas nas que foram adoptadas por Yang & Wu (2001) e estão especificadas no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 – Propriedades geométricas e mecânicas da viga.

	Valor	Unidades
L	25.0	m
B e H	2.43	m
A	5.90	m ²
I_2 e I_3	2.90	m ⁴
E	2.87	GPa
ν	0.2	-
\bar{m}	2303	kg/m

A massa suspensa é modelada com dois elementos finitos de treliça 2D. O elemento superior simula a massa $M_s = 5750 \text{ kg}$ e o elemento inferior simula a rigidez $k = 1595 \times 10^3 \text{ N/m}$. A massa suspensa move-se a uma velocidade constante de $v = 100 \text{ km/h}$, a sua frequência é $f_v = 2.65 \text{ Hz}$ e o coeficiente de massa é $M_s/(\bar{m} L) = 0.1$. Considera-se que os efeitos de amortecimento da ponte e do veículo são desprezáveis.

É utilizado o método- α para resolver a equação de equilíbrio dinâmico, tendo-se adoptado os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.005 \text{ s}$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.50$ e $\alpha = 0$. São considerados 180 intervalos de tempo.

O deslocamento e a aceleração verticais a meio vão da viga encontram-se representados na Figura 3.14.

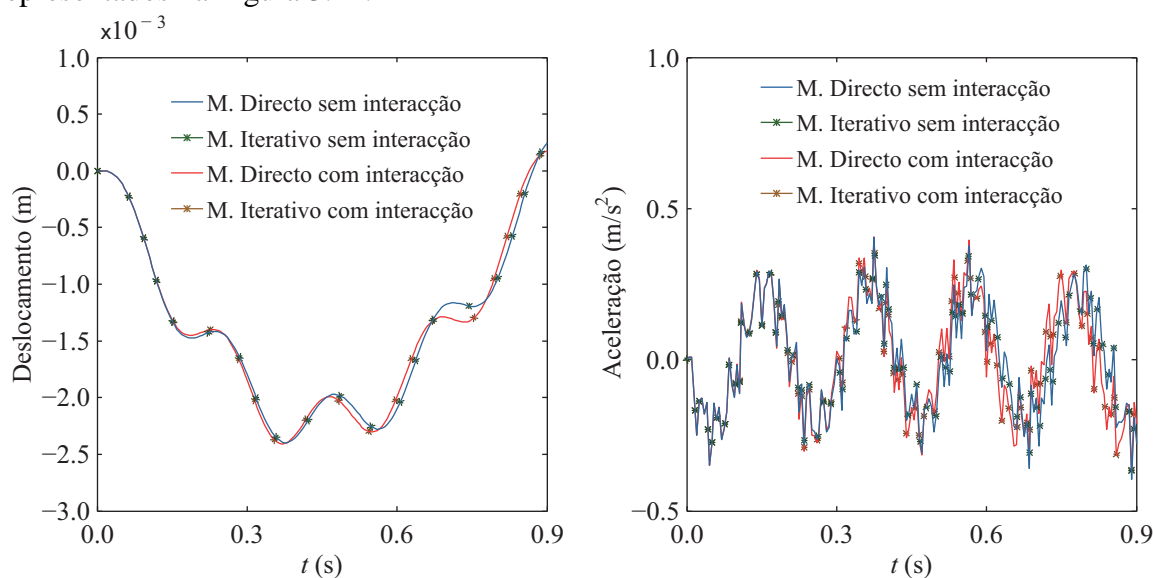


Figura 3.14 – Deslocamento e aceleração verticais a meio vão da viga.

O deslocamento e a aceleração verticais da massa encontram-se representados na Figura 3.15.

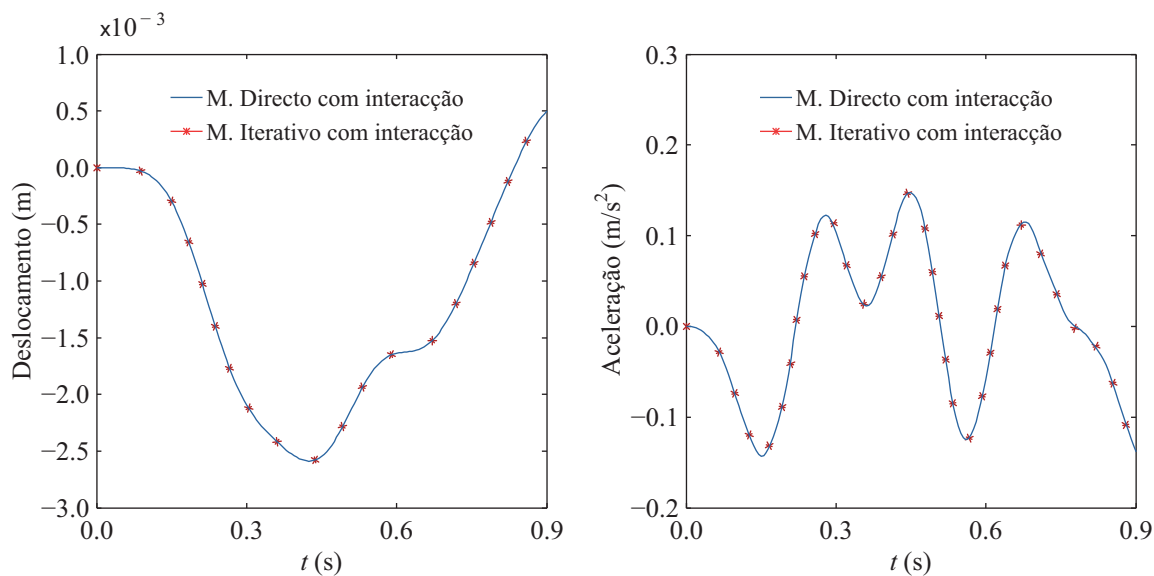


Figura 3.15 – Deslocamento e aceleração verticais da massa.

A Figura 3.16 mostra a variação da força de interacção entre a massa suspensa e a viga simplesmente apoiada.

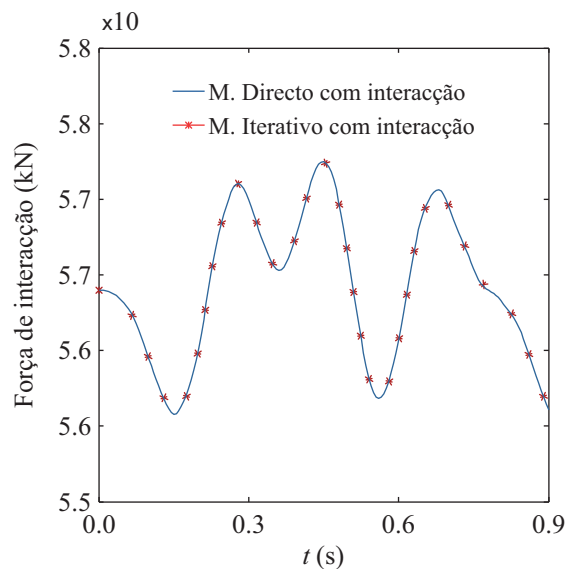


Figura 3.16 – Força de interacção entre a massa suspensa e a viga simplesmente apoiada.

Verifica-se que os resultados obtidos por intermédio da formulação proposta são praticamente coincidentes com os publicados por Calçada & Cunha (1998) e Bowe & Mullarkey (2005).

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO NO PROGRAMA FEMIX

4.1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos (MEF) é usado para analisar uma grande diversidade de problemas no âmbito da Engenharia de Estruturas, existindo actualmente uma grande variedade de programas comerciais de cálculo automático baseados neste método, tais como ANSYS, ROBOT Millennium ou SAP. No entanto, no domínio da investigação científica, o uso destes programas comerciais dificulta a implementação de novos métodos ou a modificação de algumas componentes, dado que na maioria dos programas não se tem acesso ao seu código computacional e nem sempre é possível estabelecer uma cooperação próxima com as pessoas que estão ligadas ao desenvolvimento do referido código. Por esses motivos, e tendo também em atenção o carácter inovador da metodologia associada ao método directo descrito na secção 3.4, decidiu-se implementar a referida metodologia na versão 4.0 do programa de cálculo automático FEMIX (Azevedo *et al.*, 2003). O programa FEMIX 4.0 foi desenvolvido de raiz e concebido de forma a que a implementação de novos tipos de elementos finitos e modelos de análise seja simples e eficiente, permitindo, ao mesmo tempo, a análise de problemas com um elevado grau de complexidade. No desenvolvimento do programa FEMIX 4.0 é utilizada a linguagem ANSI-C.

O programa FEMIX 4.0 era inicialmente composto por três módulos: *prefemix*, *femix* e *posfemix*. O módulo *prefemix* efectua o pré-processamento da informação, i.e., realiza a leitura e validação do ficheiro de dados que contém toda a informação do problema que se pretende analisar, seguida da gravação de ficheiros binários com a informação validada. As

validações realizadas nesta fase são de extrema importância para evitar eventuais erros ou falhas que possam ocorrer nas operações posteriores. No módulo *femix* é efectuada a leitura dos referidos ficheiros binários, o cálculo dos resultados com base no método dos elementos finitos e a gravação de ficheiros binários contendo os resultados obtidos nesta fase. O módulo *posfemix* permite realizar diversas operações de pós-processamento da informação gerada pelos dois módulos descritos anteriormente.

Na secção 4.2 descreve-se, de modo sintético, as principais características do programa FEMIX 4.0, a biblioteca de funções utilizada para otimizar o desenvolvimento do código computacional e as principais técnicas utilizadas no armazenamento de matrizes em memória. Dado que os métodos de análise dinâmica podem ser considerados como uma extensão dos métodos tradicionais de análise estática, existe uma forte analogia entre os códigos associados a ambos os tipos de análise. Por esse motivo, as principais subrotinas que incluem o código associado à análise estática linear são também sucintamente descritas na secção 4.2.

No âmbito desta dissertação foi implementada a análise dinâmica linear para o seguinte tipo de estruturas: reticuladas 2D e 3D; articuladas 2D e 3D e discretizadas por elementos de volume. A secção 4.3 é dedicada à descrição da implementação da análise dinâmica para os tipos de estruturas referidos. Embora o principal objectivo desta dissertação esteja relacionado com a análise dinâmica de pontes em redes ferroviárias de alta velocidade, pretende-se que as implementações efectuadas no programa FEMIX 4.0 tenham um carácter genérico, permitindo assim a análise dos mais variados tipos de problemas dentro e fora do âmbito da Engenharia Civil. Por esse motivo, as implementações associadas à análise dinâmica, à modelação do veículo como um conjunto de cargas móveis e à modelação da interacção veículo-estrutura, originaram uma maior complexidade do ficheiro de dados lido pelo módulo *prefemix*. Devido à maior complexidade, foi necessário desenvolver um quarto módulo, denominado *edit_gldat*, para facilitar a edição dos respectivos ficheiros de dados.

A passagem de um veículo sobre uma estrutura pode ser simulada por intermédio de um conjunto de cargas móveis correspondentes aos eixos do veículo. A secção 4.4 é integralmente dedicada à descrição da implementação, no módulo *edit_gldat*, do algoritmo que se destina à geração da informação relativa ao conjunto de cargas móveis.

Nos casos em que é necessário avaliar de forma precisa e correcta o comportamento dinâmico da estrutura ou analisar a resposta dinâmica do veículo, é possível modelar este último tendo em atenção as suas características dinâmicas e considerar a interacção existente entre os dois sistemas. A implementação da análise dinâmica com interacção veículo-estrutura nos diversos módulos do programa FEMIX 4.0 é descrita na secção 4.5.

4.2 VERSÃO INICIAL DO PROGRAMA FEMIX 4.0

4.2.1 Tipos de análises implementadas

Inicialmente, o programa FEMIX 4.0 permitia efectuar análises estáticas, em regime linear ou não linear material, dos seguintes tipos de estruturas:

- 1) estruturas reticuladas bidimensionais e tridimensionais (pórticos);
- 2) estruturas articuladas bidimensionais e tridimensionais (treliças);
- 3) estruturas submetidas a estado plano de tensão;
- 4) estruturas submetidas a estado plano de deformação;
- 5) estruturas submetidas a estado axissimétrico de tensão e deformação;
- 6) lajes (formulação de Mindlin);
- 7) cascas espessas (formulação de Ahmad);
- 8) cascas planas (formulação de Mindlin);
- 9) estruturas tridimensionais discretizadas por elementos de volume (*bricks*).

4.2.2 Estrutura do ficheiro de dados

O ficheiro de dados do FEMIX 4.0 com a extensão *_gl.dat* (*geometry and load data file*) é constituído por um conjunto de blocos que serve para definir e estruturar a informação relativa ao problema que se pretende analisar. Os blocos de dados não têm de seguir uma ordem pré-definida, bastando apenas que os blocos que definem propriedades sejam colocados antes de essas propriedades serem referidas. Esta estruturação do ficheiro de dados facilita a adição de novos blocos de dados e a implementação de novas análises e

tipos de elementos finitos. No Quadro 4.1 apresenta-se um exemplo de um bloco de dados que define os graus de liberdade prescritos de cada ponto.

Quadro 4.1 – Bloco de dados relativo aos graus de liberdade prescritos de cada ponto.

```
<SUPPORTS>
## Points with fixed degrees of freedom
  COUNT = 2 ; # N. of points with fixed degrees of freedom

## Content of each column:
# A -> Counter (or counter range)
# B -> Group name
# C -> Phase (or phase range)
# D -> Point number (or point number range)
# E -> N. of fixed degrees of freedom in the current point(s)
# F -> Fixed degrees of freedom:
#   - Available keywords: _D1, _D2, _D3, _R1, _R2 or _R3
#   A   B           C   D E F
#   1 MY_GROUP 1   1 2  _D2 _D3 ;
#   2 MY_GROUP 1 51 1  _D3 ;
</SUPPORTS>
```

Cada bloco de dados é delimitado por um conjunto de etiquetas (ex.: <SUPPORTS> e </SUPPORTS>). Desta forma, torna-se mais fácil estruturar a informação e garante-se uma leitura eficiente e segura do ficheiro de dados.

4.2.3 Biblioteca de funções básicas

O desenvolvimento de software que envolva essencialmente cálculos numéricos, como é o caso de programas baseados no método dos elementos finitos, requer a repetida realização de operações elementares, de que são exemplo as operações de álgebra linear com base em vectores e matrizes, a alocação de memória para estruturas de dados, a leitura em ficheiro seguida de uma validação exaustiva, a interacção com o utilizador em modo de consola de texto, etc. (Azevedo *et al.*, 2003). Para realizar estas operações elementares, Azevedo (1996b) desenvolveu diversas funções genéricas em ANSI-C que foram englobadas numa biblioteca designada *cutil*. No Quadro 4.2 apresenta-se um exemplo de como o uso da referida biblioteca simplifica significativamente a realização dos cálculos numéricos efectuados por programas de cálculo automático.

Quadro 4.2 – Resolução de um sistema de equações lineares recorrendo à biblioteca *cutil*.

```

...
double** ad2_A;
double* ad1_b;
double* ad1_x;
...
n = get_pos_int_1(f, &i, &l);

dimed2(&ad2_A, n, n);
dimed1(&ad1_b, n);
dimed1(&ad1_x, n);

import_mat(ad2_A, n, n, f, "Table", "NoNumbers", "Semicolons", &i);
import_vect(ad1_b, n, f, "", "NoNumbers", "Semicolons", &i);

mat_solve_gauss_1(ad2_A, ad1_x, ad1_b, n);

freed1(ad1_x);
freed1(ad1_b);
freed2(ad2_A);
...

```

O código apresentado no Quadro 4.2 serve para resolver o sistema de equações $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ e efectua as seguintes operações: declaração da matriz \underline{A} como sendo uma matriz de *doubles* e declaração dos vectores \underline{b} e \underline{x} como sendo vectores de *doubles*, leitura no ficheiro f de um inteiro n que indica a dimensão do sistema de equações, alocação de memória para a matriz \underline{A} e para os vectores \underline{b} e \underline{x} , leitura com validação da matriz e dos vectores no ficheiro f , resolução do sistema de equações pelo método de eliminação de Gauss e libertação da memória correspondente aos vectores \underline{x} e \underline{b} e à matriz \underline{A} .

4.2.4 Armazenamento de matrizes em memória

A maioria das operações associadas ao método dos elementos finitos e à resolução do sistema de equações é efectuada no módulo *femix*. Este módulo é o que exige maiores recursos do computador na resolução de grandes problemas, sendo conveniente uma gestão cuidada da memória que é utilizada. Por esse motivo, no módulo *femix* são utilizadas diversas técnicas de armazenamento de matrizes em memória, que são aplicadas de acordo com o tipo de operações efectuadas sobre os termos das matrizes. Estas técnicas, quando devidamente exploradas, conduzem a significativas economias de recursos informáticos, nomeadamente à redução do número de operações de cálculo, à diminuição da quantidade

de memória consumida e a um acesso mais rápido aos dados armazenados. Para exemplificar as diversas técnicas de armazenamento de matrizes considera-se a matriz simétrica \underline{A} definida por

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.2.4.1 Armazenamento de todos os termos da matriz

Nesta técnica de armazenamento são guardados em memória todos os termos da matriz (nulos ou não nulos).

Quadro 4.3 – Armazenamento de todos os termos da matriz \underline{A} .

```
...  
double** ad2_A;  
  
dimed2(&ad2_A, 4, 4);  
zerod2(ad2_A, 4, 4);  
  
ad2_A[1][1] = 1;  
ad2_A[1][3] = 2;  
ad2_A[3][1] = ad2_A[1][3];  
ad2_A[2][2] = 3;  
ad2_A[3][3] = 4;  
ad2_A[3][4] = 5;  
ad2_A[4][3] = ad2_A[3][4];  
ad2_A[4][4] = 6;  
...
```

O código apresentado no Quadro 4.3 serve para armazenar a matriz \underline{A} em memória e efectua as seguintes operações: declaração da matriz \underline{A} como sendo uma matriz de *doubles*, alocação de memória para a matriz \underline{A} , inicialização de todos os termos com o valor zero e atribuição dos valores não nulos da matriz.

Esta técnica de armazenamento é a que consome maior quantidade de memória, sendo no entanto a alocação de memória efectuada numa única operação, o que para matrizes com uma dimensão significativa e poucos termos nulos pode proporcionar

poupanças de tempo consideráveis. O acesso a cada um dos termos da matriz é realizado de forma directa.

4.2.4.2 Armazenamento em semibanda de largura variável

A técnica de armazenamento em semibanda de largura variável é também designada armazenamento em NCSB (*non-constant semi-band*). Como a matriz \underline{A} (4.1) é simétrica, não são armazenados os termos do seu triângulo inferior, reduzindo deste modo o número de termos armazenados e evitando todas as operações de cálculo que sobre eles teriam de ser efectuadas. Para além de se considerar apenas os termos do triângulo superior existe ainda a vantagem de muitos desses termos serem nulos. Deste modo, apenas são armazenados em cada linha os termos situados desde o termo da diagonal principal até ao último termo não nulo, inclusive (ver Figura 4.1).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Figura 4.1 – Semibanda de largura variável da matriz \underline{A} .

Como a técnica de armazenamento em NCSB é usada na resolução do sistema de equações pelo método de eliminação de Gauss, a banda definida na Figura 4.1 não pode ser reentrante, i.e., o índice da última coluna de qualquer linha da matriz nunca pode ser inferior ao índice da última coluna da linha anterior. Por esse motivo, o termo A_{23} é armazenado em memória, apesar de ser nulo.

Quadro 4.4 – Armazenamento em NCSB da matriz A .

```

...
int* ai1_NCSB_LastColumn_A;
double** ad2_NCSB_Value_A;

dimei1(&ai1_NCSB_LastColumn_A, 4);

ai1_NCSB_LastColumn_A[1] = 3;
ai1_NCSB_LastColumn_A[2] = 3;
ai1_NCSB_LastColumn_A[3] = 4;
ai1_NCSB_LastColumn_A[4] = 4;

dimed2_ncsb(&ad2_NCSB_Value_A, 4, ai1_NCSB_LastColumn_A);
zerod2_ncsb(ad2_NCSB_Value_A, 4, ai1_NCSB_LastColumn_A);

ad2_NCSB_Value_A[1][1] = 1;
ad2_NCSB_Value_A[1][3] = 2;
ad2_NCSB_Value_A[2][2] = 3;
ad2_NCSB_Value_A[3][3] = 4;
ad2_NCSB_Value_A[3][4] = 5;
ad2_NCSB_Value_A[4][4] = 6;
...

```

O código apresentado no Quadro 4.4 serve para armazenar a matriz A em memória, utilizando a técnica de armazenamento em NCSB. O vector *ai1_NCSB_LastColumn_A* armazena a coluna do último termo de cada linha da semibanda e a matriz *ad2_NCSB_Value_A* armazena o valor de cada termo. O código apresentado no Quadro 4.4 é análogo ao código apresentado no Quadro 4.3.

Esta técnica de armazenamento de matrizes apresenta como principal inconveniente o facto de necessitar de um vector suplementar (*ai1_NCSB_LastColumn*) para aceder aos termos da matriz. No entanto, esta maior exigência de recursos do computador é compensada pela redução do número de termos armazenados, o que provoca uma diminuição da quantidade de operações de cálculo a ser efectuadas. Quanto menor for o rácio entre os termos situados na semibanda e o número total de termos, maior será a eficiência conseguida com a aplicação desta técnica.

4.2.4.3 Armazenamento esparsos

Nesta técnica de armazenamento apenas são guardados em memória os termos não nulos da matriz \underline{A} (4.1). Como a matriz \underline{A} é simétrica, apenas são armazenados os termos não nulos do seu triângulo superior (ver Figura 4.2).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Figura 4.2 – Termos não nulos do triângulo superior da matriz \underline{A} .

Quadro 4.5 – Armazenamento esparsos da matriz \underline{A} .

```
...
int* ai1_NNZT_A;
int** ai2_NZT_Column_A;
double** ad2_NZT_Value_A;

dimei1(&ai1_NNZT_A, 4);

ai1_NNZT_A[1] = 2;
ai1_NNZT_A[2] = 1;
ai1_NNZT_A[3] = 2;
ai1_NNZT_A[4] = 1;

dimei2_nc(&ai2_NZT_Column_A, 4, ai1_NNZT_A);
dimed2_nc(&ad2_NZT_Value_A, 4, ai1_NNZT_A);

ai2_NZT_Column_A[1][1] = 1;
ad2_NZT_Value_A[1][1] = 1;
ai2_NZT_Column_A[1][2] = 3;
ad2_NZT_Value_A[1][2] = 2;
ai2_NZT_Column_A[2][1] = 2;
ad2_NZT_Value_A[2][1] = 3;
ai2_NZT_Column_A[3][1] = 3;
ad2_NZT_Value_A[3][1] = 4;
ai2_NZT_Column_A[3][2] = 4;
ad2_NZT_Value_A[3][2] = 5;
ai2_NZT_Column_A[4][1] = 4;
ad2_NZT_Value_A[4][1] = 6;
...
```

O código apresentado no Quadro 4.5 serve para armazenar a matriz A em memória, utilizando a técnica de armazenamento esparsa. O vector $ai1_NNZT_A$ armazena o número de termos não nulos de cada linha da matriz, a matriz $ai2_NZT_Column_A$ armazena a coluna de cada termo e a matriz $ad2_NZT_Value_A$ armazena o valor de cada termo. O código apresentado no Quadro 4.5 é análogo ao código apresentado no Quadro 4.4.

Esta técnica de armazenamento de matrizes apresenta o mesmo inconveniente da técnica de armazenamento em NCSB, i.e., o facto de requerer um vector suplementar ($ai1_NNZT_A$) para aceder aos termos da matriz. É também necessária a existência de uma matriz suplementar ($ai2_NZT_Column_A$) para aceder aos termos da matriz. A maior exigência de recursos do computador é, de igual forma, compensada pela redução do número de termos armazenados, o que provoca também uma diminuição da quantidade de operações de cálculo a ser efectuadas. A eficiência conseguida com a aplicação desta técnica aumenta com a diminuição do rácio entre os termos não nulos e o número total de termos.

4.2.5 Subrotinas do módulo *femix*

Numa fase inicial, o módulo *femix* do programa FEMIX 4.0 era essencialmente composto pelos seguintes submódulos:

- 1) *MainStaticLinGaussElimNCSB* – engloba todas as subrotinas associadas a uma análise estática linear, sendo o sistema de equações resolvido pelo método de eliminação de Gauss e a matriz de rigidez armazenada em NCSB;
- 2) *MainStaticLinIterJacPreConjGrad* – engloba todas as subrotinas associadas a uma análise estática linear, sendo o sistema de equações resolvido pelo método dos gradientes conjugados (Azevedo & Barros, 1990);
- 3) *MainStaticMaterNonlinGaussElimNCSB* – engloba todas as subrotinas associadas a uma análise estática não linear material, sendo o sistema de equações resolvido pelo método de eliminação de Gauss e a matriz de rigidez armazenada em NCSB;
- 4) *MainStaticMaterNonlinIterJacPreConjGrad* – engloba todas as subrotinas associadas a uma análise estática não linear material, sendo o sistema de equações resolvido pelo método dos gradientes conjugados.

Devido à analogia existente entre as subrotinas associadas a uma análise dinâmica linear e as subrotinas associadas a uma análise estática linear, descreve-se em seguida, e de forma sucinta, as principais subrotinas associadas a este último tipo de análise. O sistema de equações misto referido na secção 3.4.3 é resolvido pelo método de eliminação de Gauss, dado que no caso de a matriz de rigidez efectiva ser constante ao longo de todos os intervalos de tempo, este método revela-se muito eficiente. Por esse motivo, são apresentadas de seguida as principais subrotinas que constituem o submódulo *MainStaticLinGaussElimNCSB*, cuja resolução do sistema de equações é também realizada pelo método de eliminação de Gauss.

- 1) *CalcMeshAuxData* – calcula tabelas auxiliares com informação sobre a malha de elementos finitos para tornar mais rápido o processamento da informação ao longo da análise.
- 2) *AssembGlobalStiffMat* – efectua a montagem da matriz de rigidez global com base nos seguintes pressupostos: a matriz de rigidez de cada elemento é calculada uma só vez e não é guardada, nem na memória, nem em disco; a matriz de rigidez do elemento corrente é espalhada por todas as linhas da matriz de rigidez global para as quais ele contribui; é alocado espaço suficiente para que cada linha da matriz de rigidez global possa receber termos potencialmente não nulos, sem existirem constantes realocações de memória; quando se conclui que uma linha da matriz de rigidez global já não vai receber mais nenhuma contribuição, é efectuada a remoção de todos os termos nulos, seguida de uma realocação de memória; a matriz de rigidez global é guardada na memória em armazenamento esparsa.
- 3) *Calc_NCSB_KFF* – a matriz de rigidez global é guardada em memória em armazenamento em NCSB. Esta técnica de armazenamento revela-se muito vantajosa no caso de o sistema de equações ser resolvido pelo método de eliminação de Gauss.
- 4) *SolveGaussElim_K* – são executadas algumas das operações associadas ao método de eliminação de Gauss. Nesta fase, apenas se opera sobre a matriz de rigidez global, sendo este processo designado por condensação dos elementos pertencentes ao triângulo inferior da matriz, obtendo-se assim uma matriz triangular superior.

- 5) *Calc_F_FreePrime* – calcula o vector global de forças nodais efectivas. Este vector é composto pelas forças nodais equivalentes à acção exterior e pelas forças nodais equivalentes aos deslocamentos segundo os graus de liberdade prescritos.
- 6) *SolveGaussElim_F* – são executadas as restantes operações associadas ao método de eliminação de Gauss. Nesta fase, efectua-se todas as operações sobre os termos independentes associadas à condensação dos elementos da matriz de rigidez realizada anteriormente e resolve-se o sistema por substituição inversa.
- 7) *Calc_R_Presc* – calcula as reacções de apoio, que consistem nas forças que fazem com que os deslocamentos segundo os graus de liberdade prescritos assumam os respectivos valores.
- 8) *WriteDisplReact* – grava os deslocamentos, segundo os graus de liberdade não prescritos, e as reacções de apoio num ficheiro binário.

4.3 IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA

Como já foi referido anteriormente, a implementação da análise dinâmica linear no programa FEMIX 4.0 foi baseada na estruturação já existente para a análise estática linear. A análise dinâmica linear foi implementada para o seguinte tipo de estruturas:

- 1) estruturas reticuladas bidimensionais e tridimensionais;
- 2) estruturas articuladas bidimensionais e tridimensionais;
- 3) estruturas tridimensionais discretizadas por elementos de volume (*bricks*).

Foram implementados novos blocos de dados no ficheiro *_gl.dat* para realizar a leitura de toda a informação adicional que uma análise dinâmica requer. Os blocos foram estruturados de forma idêntica aos já existentes, tendo-se procedido a uma exaustiva validação dos mesmos para assegurar uma leitura correcta dos dados fornecidos pelo utilizador e um eficaz processamento dos mesmos.

Nesta fase foi necessário efectuar implementações em todos os módulos do programa FEMIX 4.0, sendo de realçar as implementações efectuadas ao nível do módulo *femix* e a criação de um novo módulo denominado *edit_gldat*, que é adiante descrito.

4.3.1 Blocos adicionados ao ficheiro de dados *_gl.dat*

Como foi atrás referido, o módulo *prefemix* efectua o pré-processamento da informação, i.e., realiza a leitura e validação do ficheiro de dados que contém toda a informação do problema que se pretende analisar. Para realizar uma análise dinâmica foi necessário adicionar ao ficheiro *_gl.dat* blocos de dados adicionais para efectuar a leitura e validação dos parâmetros do método de resolução da equação de equilíbrio dinâmico e de todas as características dinâmicas do sistema.

4.3.1.1 Parâmetros da análise dinâmica

Como o método de Newmark é um caso particular do método- α para $\alpha = 0$ (ver secção 2.4), apenas foi implementado o método- α no programa FEMIX 4.0. O bloco de dados apresentado no Quadro 4.6 serve para definir os parâmetros associados ao referido método.

Quadro 4.6 – Bloco de dados associado aos parâmetros do método- α .

```
<DYNAMIC_ANALYSIS_PARAMETERS>
  TIME_STEPPING_METHOD = _ALPHA_METHOD ;
  GAMMA = 0.5 ;
  BETA = 0.25 ;
  ALPHA = 0.0 ;
</DYNAMIC_ANALYSIS_PARAMETERS>
```

4.3.1.2 Parâmetros do amortecimento de Rayleigh

No âmbito da presente dissertação é adoptada a formulação de Rayleigh para definir a matriz de amortecimento viscoso (ver secção 2.3.5). Nesta formulação, a matriz de amortecimento depende das matrizes de massa e rigidez, e dos parâmetros a_0 e a_1 . No Quadro 4.7 apresenta-se um exemplo do bloco de dados usado para definir este tipo de amortecimento.

Quadro 4.7 – Bloco de dados associado ao amortecimento de Rayleigh.

```

<RAYLEIGH_DAMPING_FACTORS>
## Rayleigh damping factors for linear isotropic and orthotropic materials
## C is the damping matrix
## M is the mass matrix
## K is the stiffness matrix
## C = a0 M + a1 K
COUNT = 3 ; # N. of specifications

## Content of each column:
# A -> Counter
# B -> Material type
# C -> Material name
# D -> Damping factor of the mass matrix - a0
# E -> Damping factor of the stiffness matrix - a1
#      A      B      C      D      E
      1  _LIN_ISO  CONCRETE  0.2360  0.000709;
      2  _LIN_ORTHO CONCRETE  0.2360  0.000709;
      3  _LIN_ISO  STEEL     0.0760  0.000212;
</RAYLEIGH_DAMPING_FACTORS>

```

O amortecimento é definido para cada tipo de material (isotrópico ou ortotrópico), sendo possível definir parâmetros distintos para cada material. Em alguns softwares comerciais não é possível definir o amortecimento desta forma, o que introduz alguns erros nos modelos numéricos de estruturas correntes no âmbito da Engenharia Civil, tais como estruturas mistas de betão e aço.

4.3.1.3 Condições dinâmicas iniciais

Este bloco de dados serve para definir as condições dinâmicas para o instante inicial ($t = 0$). Assume-se que os deslocamentos, velocidades e acelerações iniciais, segundo os graus de liberdade que não são referidos neste bloco, são nulos. No Quadro 4.8 apresenta-se um exemplo do bloco de dados com as condições dinâmicas iniciais de um problema dinâmico.

Quadro 4.8 – Bloco de dados relativo às condições dinâmicas iniciais.

```

<DYNAMIC_INITIAL_CONDITIONS>
## Points with dynamic initial conditions
  COUNT = 2 ; # N. of dynamic initial conditions

## Content of each column:
# A -> Counter (or counter range)
# B -> Point number (or point number range)
# C -> Degree of freedom
#   - Available keywords: _D1, _D2, _D3, _R1, _R2 or _R3
# D -> Value of the initial displacement
# E -> Value of the initial velocity
# F -> Value of the initial acceleration
#   A   B   C           D       E   F
#   1   7   _D2    0.00350  0.0950  1.20
#   2   7   _R1    0.00057  0.0045  0.27
</DYNAMIC_INITIAL_CONDITIONS>

```

4.3.1.4 Duração dos intervalos de tempo e respectivos carregamentos

Para se conseguir uma elevada uniformização entre o código associado a uma análise estática linear e o código associado a uma análise dinâmica linear, considera-se que cada intervalo de tempo (*timestep*) da análise dinâmica equivale a uma combinação de acções (*combination*) associada a uma análise estática linear. Desta forma é possível aproveitar uma parte significativa do código usado na análise estática linear para efectuar o pré-processamento, processamento e pós-processamento da informação. O bloco de dados apresentado no Quadro 4.9 é constituído por dois blocos internos: o primeiro serve para definir os parâmetros de cada intervalo de tempo, como por exemplo, a sua duração, e o segundo serve para indicar os coeficientes de combinação dos diversos casos de carga.

Quadro 4.9 – Bloco de dados relativo aos parâmetros da combinação e casos de carga.

```

<COMBINATION>

<COMBINATION_PARAMETERS>
  COMBINATION_RANGE = [1-180] ;
  COMBINATION_TITLE = Empty combination ;
  COMBINATION_GROUP = MY_GROUP ;
  STEP_DURATION = 0.005 ;
</COMBINATION_PARAMETERS>

<LOAD_CASE_FACTORS>
## Load case factors defining a combination
  COUNT = 0 ; # N. of load cases in the combination

## Content of each column:
#  A -> Counter (or counter range)
#  B -> Load case number (or load case range)
#  C -> Load case factor
#      A      B      C
</LOAD_CASE_FACTORS>

</COMBINATION>

```

Em relação ao bloco de dados já existente para definir as combinações de acções para uma análise estática apenas se introduziu um parâmetro adicional, nomeadamente, a duração do intervalo de tempo (*STEP_DURATION*).

4.3.2 Implementação do módulo *edit_gldat*

Durante todo o desenvolvimento do programa FEMIX 4.0 houve sempre a preocupação de tornar o programa flexível e genérico, de modo a poder analisar vários tipos de problemas dentro e fora do âmbito da Engenharia Civil. Esta filosofia de programação foi também mantida durante a implementação da análise dinâmica. No entanto, esta flexibilidade e elevado potencial de análise provocaram um aumento da complexidade do ficheiro de dados. Para facilitar a edição deste ficheiro foi implementado um novo módulo denominado de *edit_gldat*, que é executado antes do módulo *prefemix*.

Numa fase inicial foram implementadas as seguintes funções no módulo *edit_gldat*:

- 1) visualizar as combinações correntes e respectivos casos de carga;
- 2) remover todas as combinações e respectivos casos de carga;

3) inserir combinações vazias.

No Quadro 4.10 é apresentada, como exemplo, a informação gerada pelo módulo *edit_gldat* sobre os intervalos de tempo e respectivos casos de carga associados à passagem, em simultâneo, de dois comboios sobre uma ponte. Os intervalos de tempo são divididos nas seguintes fases: i) a ponte encontra-se em vibração livre; ii) o comboio *Train_A* entra na ponte; iii) o comboio *Train_B* entra na ponte; iv) o comboio *Train_A* sai da ponte; v) o comboio *Train_B* sai da ponte, ficando esta em vibração livre.

Quadro 4.10 – Visualização dos intervalos de tempo e respectivos casos de carga.

Combination	Step duration	Start Time	EndTime	Load case title(s)
[1-5]	0.0020	0.000	0.0100	Empty combination
[6-10]	0.0020	0.010	0.0200	Train_A
[11-175]	0.0020	0.020	0.3500	Train_A Train_B
[176-180]	0.0020	0.350	0.3600	Train_B
[181-200]	0.0020	0.360	0.4000	Empty combination

4.3.3 Subrotinas implementadas no módulo *femix*

Para implementar a análise dinâmica linear no módulo *femix* foi introduzido um módulo adicional designado *MainDynamicLinGaussElimNCSB*. Este módulo engloba todas as subrotinas associadas a este tipo de análise, sendo o sistema de equações resolvido pelo método de eliminação de Gauss e a matriz de rigidez armazenada em modo NCSB. Na fase de implementação das novas subrotinas e de adaptação do código já existente para a análise estática, procurou-se manter a eficiência de todo o código, dado que numa análise dinâmica, qualquer ineficiência existente pode eventualmente ser repetida em milhares de intervalos de tempo.

São apresentadas de seguida as principais subrotinas que constituem o módulo *MainDynamicLinGaussElimNCSB*, não sendo explicadas as subrotinas que integram também o módulo referente à análise estática, dado que já foram abordadas na secção 4.2.5.

1) *CalcMeshAuxData*.

- 2) *AssembGlobalStiffMat*.
- 3) *AssembGlobalMassMat* – efectua a montagem da matriz de massa global com base nos mesmos pressupostos assumidos para a montagem da matriz de rigidez global.
- 4) *AssembGlobalDampMat* – cada matriz elementar de amortecimento é calculada pela formulação de Rayleigh, tendo em conta os parâmetros a_0 e a_1 definidos para cada material e as matrizes elementares de massa e rigidez. As referidas matrizes de massa e rigidez são calculadas novamente, dado que quando são calculadas pela primeira vez nas subrotinas *AssembGlobalMassMat* e *AssembGlobalStiffMat*, respectivamente, não são guardadas, nem na memória, nem no disco para aumentar a eficiência e rapidez de todo o processo. A montagem da matriz de amortecimento global é realizada com base nos mesmos pressupostos assumidos para a montagem da matriz de rigidez global.
- 5) *CalcAlphaMethodParam* – calcula os parâmetros A_0 a A_5 definidos por (2.115). Alguns destes parâmetros podem eventualmente variar ao longo da análise, dado que dependem da duração de cada intervalo de tempo.
- 6) *CalcGlobalEffectiveStiffMat* – calcula a matriz de rigidez global efectiva com base nas matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, de acordo com (2.149). Só é necessário recalcular a referida matriz se a duração do intervalo de tempo mudar. Dado que a soma de duas ou mais matrizes armazenadas em modo esparsa não é uma operação directa, foi necessário criar a subrotina *SparseMatAddition*. A referida subrotina multiplica cada uma das matrizes por um escalar e efectua o seu somatório, de acordo com a expressão

$$\underline{C} = f \underline{A} + g \underline{B} \quad (4.1)$$

Se as matrizes \underline{A} e \underline{B} tiverem elementos não nulos em posições diferentes, é necessário determinar as posições dos elementos não nulos da matriz \underline{C} para poder alocar a referida matriz em memória.

- 7) *Calc_NCSB_KFF* – efectua sobre a matriz de rigidez global efectiva as mesmas operações realizadas, numa análise estática, sobre a matriz de rigidez global (ver secção 4.2.5).
- 8) *SolveGaussElim_K* – opera sobre a matriz de rigidez global efectiva as mesmas operações executadas, numa análise estática, sobre a matriz de rigidez global (ver secção 4.2.5).
- 9) *Calc_F_Overbar_Free_Dyn* – calcula o vector global das forças nodais equivalentes efectivas de acordo com (2.150). Dado que as matrizes utilizadas são armazenadas em modo esperso foi necessário desenvolver as subrotinas *AddTranspSparseMatMultByVect* e *AddSparseSymMatMultByVect*. A subrotina *AddTranspSparseMatMultByVect* executa a seguinte operação matemática

$$\underline{v} = \underline{v} + \underline{A}^T \underline{u} f \quad (4.2)$$

sendo f um escalar, \underline{v} e \underline{u} vectores e \underline{A} uma matriz armazenada em modo esperso. A subrotina *AddSparseSymMatMultByVect* efectua a seguinte operação matemática

$$\underline{v} = \underline{v} + \underline{A} \underline{u} f \quad (4.3)$$

sendo \underline{A} uma matriz simétrica armazenada em modo esperso.

- 10) *SolveGaussElim_F* – opera sobre a matriz de rigidez global efectiva as mesmas operações executadas, numa análise estática, sobre a matriz de rigidez global (ver secção 4.2.5).
- 11) *CalcVelocAccel* – calcula os vectores de velocidades e de acelerações, de acordo com (2.107) e (2.103), respectivamente.
- 12) *Calc_R_Presc_Dyn* – calcula as reacções de apoio, que consistem nas forças que fazem com que os deslocamentos, velocidades e acelerações segundo os graus de liberdade prescritos assumam os respectivos valores.
- 13) *WriteDisplReact*.

- 14) *WriteVelocAccel* – grava os vectores de velocidades e de acelerações segundo os graus de liberdade não prescritos.

4.4 IMPLEMENTAÇÃO DAS CARGAS MÓVEIS

De acordo com a secção 3.2, a passagem de um veículo sobre uma estrutura pode ser simulada por intermédio de um conjunto de cargas móveis correspondentes aos eixos do veículo. As acções do veículo são modeladas por um conjunto de cargas concentradas aplicadas em pontos interiores aos elementos finitos, cuja posição varia ao longo do tempo, de acordo com a posição do veículo. Considera-se que uma carga concentrada aplicada num ponto nodal é um caso particular de uma carga concentrada aplicada num ponto interior a um elemento finito.

O algoritmo que se destina à geração da informação correspondente ao conjunto de cargas móveis foi implementado no módulo *edit_gldat*. Este módulo lê e valida a informação relativa ao referido conjunto e, posteriormente, gera toda a informação necessária para a definição do conjunto de cargas concentradas, para todas as posições do veículo. A informação gerada é adicionada ao ficheiro de dados *_gl.dat* existente, que é posteriormente lido pelo módulo *prefemix*. O módulo *edit_gldat* pode adicionar diversos conjuntos de cargas móveis ao mesmo ficheiro *_gl.dat*.

4.4.1 Modelação com cargas concentradas

Nesta secção apresenta-se um exemplo simples para ilustrar a informação gerada pelo módulo *edit_gldat* para modelar a passagem de um veículo sobre uma estrutura. Na Figura 4.3 encontra-se representada, para um determinado instante, uma viga simplesmente apoiada constituída por dois vãos (*B1* e *B2*). A referida viga é sujeita à passagem do comboio Alfa pendular, modelado por um conjunto de cargas concentradas (ver Figura 3.1 e Quadro 4.13).

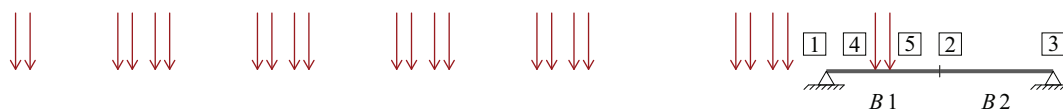


Figura 4.3 – Viga sujeita à passagem do comboio Alfa pendular.

Para o instante corrente, apenas os primeiros dois eixos do comboio Alfa pendular se encontram sobre a estrutura, estando as respectivas cargas concentradas aplicadas nos pontos interiores 4 e 5 da barra *B1*. O módulo *edit_gldat* gera e adiciona os seguintes blocos de dados ao ficheiro *_gl.dat*:

- 1) *<POINT_COORDINATES>*
- 2) *<LOAD_CASE>*
- 3) *<COMBINATION>*

O bloco de dados *<POINT_COORDINATES>* define as coordenadas dos pontos de aplicação das cargas concentradas, para todos os instantes. O bloco de dados *<LOAD_CASE>* encontra-se representado no Quadro 4.11 e define as cargas concentradas correspondentes ao comboio Alfa pendular que se encontram a actuar na estrutura, para o instante corrente. Para cada força é definido o elemento finito que está a ser carregado, o ponto de aplicação da mesma e as suas seis componentes, nomeadamente, três forças e três momentos, segundo os eixos do referencial geral.

Quadro 4.11 – Bloco de dados correspondente às cargas concentradas.

```

<LOAD_CASE>

<LOAD_CASE_PARAMETERS>
  LOAD_CASE_NUMBER = 1 ;
  LOAD_CASE_TITLE = Alfa pendular train ;
  LOAD_CASE_GROUP = MY_GROUP ;
</LOAD_CASE_PARAMETERS>

<INTERNAL_POINT_LOADS>
## Load applied to a point inside an element (global coordinate system)
  COUNT = 2 ; # N. of internal point loads

## Content of each column:
# A -> Counter (or counter range)
# B -> Loaded element
# C -> Auxiliary point with the load (or auxiliary point range)
# D -> Force - XG1
# E -> Force - XG2
# F -> Force - XG3
# G -> Moment - XG1
# H -> Moment - XG2
# I -> Moment - XG3
#   A  B  C   D   E       F   G   H   I
#   1  1  4  0.0  0.0  -132.8  0.0  0.0  0.0 ;
#   2  1  5  0.0  0.0  -132.8  0.0  0.0  0.0 ;
</INTERNAL_POINT_LOADS>

</LOAD_CASE>

```

O bloco de dados <COMBINATION> já foi descrito na secção 4.3.1.4 e encontra-se representado no Quadro 4.12.

Quadro 4.12 – Bloco de dados relativo às combinações de casos de carga.

```

<COMBINATION>

<COMBINATION_PARAMETERS>
  COMBINATION_NUMBER = 1 ;
  COMBINATION_TITLE = Alfa pendular train ;
  COMBINATION_GROUP = MY_GROUP ;
  PHASE_NUMBER = 1 ;
  STEP_DURATION = 0.005 ;
</COMBINATION_PARAMETERS>

<LOAD_CASE_FACTORS>
## Load case factors defining a combination
  COUNT = 1 ; # N. of load cases in the combination

## Content of each column:
# A -> Counter (or counter range)
# B -> Load case number (or load case range)
# C -> Load case factor
#      A   B   C
      1   1  1.0 ;
</LOAD_CASE_FACTORS>

```

4.4.2 Ficheiros de dados adicionais

Como foi atrás referido, durante todo o desenvolvimento do programa FEMIX 4.0 houve a preocupação de tornar o programa flexível e genérico. Por esse motivo, foi decidido não implementar a informação relativa aos conjuntos de cargas móveis no ficheiro de dados *_gl.dat*, tendo sido criados dois novos ficheiros: um contendo toda a informação sobre cada conjunto de cargas concentradas, com a extensão *_ml.dat* (*moving load data file*), e outro contendo toda a informação sobre o seu percurso, com a extensão *_lp.dat* (*load path data file*). Esta estruturação dos diversos ficheiros de dados permite também uma melhor organização de toda a informação, facilitando a realização de análises dinâmicas com diversos conjuntos de cargas móveis e correspondentes percursos, sem originar ficheiros de dados muito extensos.

4.4.2.1 Cargas concentradas

O ficheiro de dados *_ml.dat* contém toda a informação sobre as cargas concentradas que compõem cada conjunto de cargas móveis e as respectivas distâncias. O ficheiro de

dados apresentado no Quadro 4.13 serve para definir o conjunto de cargas móveis utilizado para modelar o comboio Alfa pendular (ver Figura 3.1).

Quadro 4.13 – Comboio Alfa pendular modelado como um conjunto de cargas móveis.

```
<MOVING_LOAD_DATA_FILE_V4.0>

<MOVING_POINT_LOADS>
## Moving point loads (global coordinate system)
  COUNT = 24 ; # N. of moving point loads

## Content of each column:
# A -> Counter (or counter range)
# B -> Distance to the previous moving point load
# C -> Force - XG1
# D -> Force - XG2
# E -> Force - XG3
# F -> Moment - XG1
# G -> Moment - XG2
# H -> Moment - XG3
#
```

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0.0	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
2	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
3	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
4	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
5	4.2	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
6	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
7	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
8	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
9	4.2	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
10	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
11	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
12	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
13	4.2	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
14	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
15	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
16	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
17	4.2	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
18	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
19	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
20	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
21	4.2	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
22	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
23	16.3	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;
24	2.7	0.0	0.0	-132.8	0.0	0.0	0.0	0.0 ;

```
</MOVING_POINT_LOADS>

</MOVING_LOAD_DATA_FILE_V4.0>
```

Cada carga concentrada é composta por três forças segundo os eixos do referencial geral e por três momentos em torno dos referidos eixos. No Quadro 4.13, a coluna *B* do bloco de dados <MOVING_POINT_LOADS> indica a distância de cada carga concentrada à carga anterior.

4.4.2.2 Percurso das cargas móveis

O percurso das cargas móveis é definido por um conjunto de segmentos de recta auxiliares, que podem estar orientados segundo qualquer direcção no espaço. No Quadro 4.14 é apresentado um exemplo do ficheiro de dados utilizado para definir o percurso das cargas móveis.

Quadro 4.14 – Ficheiro de dados relativo ao percurso das cargas móveis.

```
<LOAD_PATH_DATA_FILE_V4.0>

<POINT_COORDINATES>
## Point coordinates of the load path (global coordinate system)
COUNT = 3 ; # N. of points

## Content of each column:
# A -> Counter
# B -> Coordinate - XG1
# C -> Coordinate - XG2
# D -> Coordinate - XG3
#      A      B      C      D
      1    1.00    5.00  -1.00 ;
      2    0.00   10.00  -1.00 ;
      3    1.00   15.00  -1.00 ;
</POINT_COORDINATES>

</LOAD_PATH_DATA_FILE_V4.0>
```

Na Figura 4.4 encontra-se representada uma casca sujeita a um conjunto de cargas móveis. É possível verificar que existe uma grande versatilidade na modelação do percurso das cargas móveis.

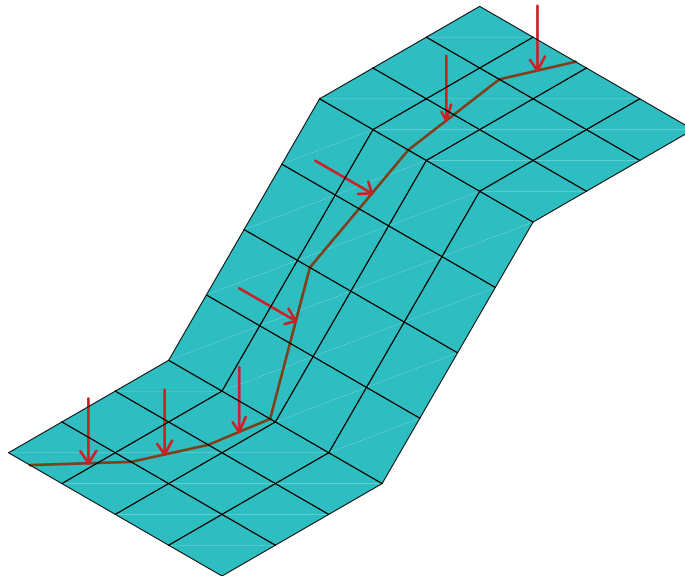


Figura 4.4 – Casca sujeita a um conjunto de cargas móveis.

4.4.3 Subrotinas implementadas no módulo *edit_gldat*

Para implementar o algoritmo que se destina à geração da informação respeitante às cargas móveis no módulo *edit_gldat* foi criado um submódulo denominado *Option_AddMovingLoad*. Este submódulo permite modelar a passagem de diversos conjuntos de cargas móveis sobre uma determinada estrutura, sendo constituído essencialmente pelas seguintes subrotinas:

- 1) *CalcPathAuxData* – calcula tabelas auxiliares com informação sobre o percurso das cargas móveis para tornar mais rápido o processamento da informação durante a análise. As referidas tabelas contêm informação sobre o comprimento de cada segmento de recta auxiliar e sobre o comprimento acumulado do percurso até à extremidade de cada segmento de recta.
- 2) *CalcFirstLastComb_ML* – calcula a primeira e última combinação correspondentes ao conjunto de cargas móveis.
- 3) *SearchLoadedElement* – procura o elemento finito que contém o ponto de aplicação de cada carga concentrada. No âmbito desta dissertação, esta subrotina apenas foi implementada para os elementos de viga 2D e 3D. Para verificar que um ponto se encontra no interior de lajes, cascas ou elementos de volume é necessário, em alguns casos, resolver sistemas de equações não lineares.

- 4) *Append_BF_PointCoord* – acrescenta a informação associada aos pontos de aplicação das cargas concentradas, para todos os instantes, ao bloco de dados *<POINT_COORDINATES>* do ficheiro *_gl.dat*.
- 5) *Append_SF_LoadCaseArray* – acrescenta os casos de carga, correspondentes às diversas posições do veículo, ao ficheiro de dados *_gl.dat*.
- 6) *Append_SF_LoadCaseFactor* – acrescenta a informação associada aos coeficientes de combinação dos diversos casos de carga ao ficheiro de dados *_gl.dat*.

4.5 IMPLEMENTAÇÃO DA INTERACÇÃO VEÍCULO-ESTRUTURA

A simulação do sistema veículo-estrutura requer a consideração de diversas malhas de elementos finitos e as suas compatibilizações em pontos de contacto. Para possibilitar análises com interacção veículo-estrutura foi necessário efectuar novas implementações ao nível dos módulos *edit_gldat*, *prefemix* e *femix*.

As implementações realizadas no módulo *edit_gldat* para gerar a informação respeitante à interacção veículo-estrutura são idênticas às efectuadas para o algoritmo destinado à geração da informação relativa às cargas móveis. Foi ainda necessário implementar algumas subrotinas responsáveis pela geração da informação relativa às diversas malhas de elementos finitos que definem os veículos, e à compatibilização das mesmas em vários pontos de contacto.

No âmbito da presente dissertação, é considerada a compatibilização de malhas de elementos finitos entre dois pontos nodais e entre um ponto nodal e um ponto interior a um elemento finito (ver secção 3.4.4). Os blocos de dados correspondentes aos referidos tipos de compatibilização foram adicionados ao ficheiro *_gl.dat* e a respectiva leitura e validação foi implementada no módulo *prefemix*.

O algoritmo para analisar a interacção veículo-estrutura desenvolvido por Azevedo *et al.* (2007) foi implementado no módulo *femix*. As alterações mais relevantes estão relacionadas com a nova classificação de graus de liberdade definida no Quadro 3.2 e com o sistema de equações misto definido na secção 3.4.3.

4.5.1 Ficheiros de dados adicionais

Para manter o programa genérico e versátil foi decidido não implementar a informação correspondente a cada veículo no ficheiro de dados *_gl.dat*, em correspondência com as implementações que tinham sido efectuadas para o algoritmo destinado à geração da informação relativa às cargas móveis (ver secção 4.4.2). Deste modo, foi criado um novo ficheiro de dados contendo toda a informação sobre cada veículo e respectivos pontos de contacto, com a extensão *_mv.dat* (*moving vehicle data file*). O percurso de cada veículo é definido pelo ficheiro de dados *_lp.dat*, cuja implementação é descrita na secção 4.4.2.2. Esta estruturação dos diversos ficheiros de dados permite uma melhor sistematização da informação e a consideração de diversos veículos e correspondentes percursos para o mesmo ficheiro *_gl.dat*.

Dado que o ficheiro de dados *_mv.dat* serve para definir a malha de elementos finitos de cada veículo e correspondente carregamento, a sua estruturação é muito idêntica à do ficheiro *_gl.dat*. O ficheiro de dados *_mv.dat* contém apenas um bloco adicional denominado *<MOVING_CONTACT_POINTS>* que serve para definir os pontos do veículo que contactam com a estrutura e respectivos graus de liberdade de interacção. O referido bloco de dados encontra-se representado no Quadro 4.15.

Quadro 4.15 – Bloco de dados relativo aos pontos de contacto do veículo.

```
<MOVING_CONTACT_POINTS>
## Moving contact points
  COUNT = 2 ; # N. of moving contact points

## Content of each column:
# A -> Counter
# B -> Contact point
# C -> N. of contacting degrees of freedom
# D -> Contacting degrees of freedom:
#   - Available keywords: _D1, _D2, _D3, _R1, _R2 or _R3
#   A  B  C  D
#     1  1  1  _D3 ;
#     2  4  1  _D3 ;
</MOVING_CONTACT_POINTS>
```

4.5.2 Blocos adicionados ao ficheiro de dados *_gl.dat*

No módulo *prefemix* foram implementados os blocos de dados referentes ao contacto entre dois pontos nodais e entre um ponto nodal e um ponto interior a um elemento finito (ver secção 3.4.4).

4.5.2.1 Contacto entre dois pontos nodais

O bloco de dados apresentado no Quadro 4.16 serve para definir o contacto entre dois pontos nodais. Para cada par de pontos são definidos os graus de liberdade com interacção e eventuais folgas que possam existir entre ambos, segundo os graus de liberdade correspondentes.

Quadro 4.16 – Bloco de dados associado ao contacto entre dois pontos nodais.

```
<POINT_TO_POINT_CONTACTS>
## Contacts between two points
  COUNT = 1 ; # N. of point to point contacts

## Content of each column:
# A -> Counter
# B -> Contact point - M (Master)
# C -> Contact point - S (Slave)
# D -> Contacting degree of freedom:
#   - Available keywords: _D1, _D2, _D3, _R1, _R2 or _R3
# E -> Value of the gap
#
# Note:
#   When a gap is positive the corresponding coordinate of the
#   slave contact point is greater than the coordinate of
#   the master contact point.
#
#   A  B  C  D      E
#   1  4  8  _D3  0.0 ;
</POINT_TO_POINT_CONTACTS>
```

O referido par de pontos é composto pelo ponto *M* (*master*) e pelo ponto *S* (*slave*). Os graus de liberdade com interacção do ponto *S* não podem ser prescritos.

4.5.2.2 Contacto entre ponto e elemento

O bloco de dados apresentado no Quadro 4.17 serve para definir o contacto entre um ponto nodal e um ponto interior a um elemento finito. A informação definida neste bloco é idêntica à informação definida no bloco apresentado no Quadro 4.16, contendo apenas uma coluna adicional com a indicação do elemento finito que contacta com o ponto nodal (coluna C).

Quadro 4.17 – Bloco de dados associado ao contacto entre um ponto e um elemento.

```
<POINT_TO_ELEMENT_CONTACTS>
## Contacts between a point and an element
  COUNT = 1 ; # N. of point to element contacts

## Content of each column:
# A -> Counter
# B -> Contact point
# C -> Contact element
# D -> Auxiliary point inside the contact element
# E -> Contacting degree of freedom:
#   - Available keywords: _D1, _D2, _D3, _R1, _R2 or _R3
# F -> Value of the gap
#
# Note:
#   When a gap is positive the corresponding coordinate of the
#   point is greater than the coordinate of the auxiliary point.
#
#   A  B  C  D  E      F
#   1  5  1  11 _D3  0.0 ;
</POINT_TO_ELEMENT_CONTACTS>
```

4.5.3 Subrotinas implementadas no módulo *edit_gldat*

Para implementar o algoritmo destinado à geração da informação respeitante à interacção veículo-estrutura no módulo *edit_gldat* foi desenvolvido um novo submódulo denominado *Option_AddMovingVehicle*. Este submódulo permite modelar a passagem de diversos veículos sobre uma determinada estrutura, sendo essencialmente composto por subrotinas idênticas às descritas na secção 4.4.3 e por subrotinas que acrescentam ao ficheiro *_gl.dat* toda a informação associada à malha de elementos finitos do veículo e respectivo carregamento.

4.5.4 Subrotinas implementadas no módulo *femix*

O algoritmo para analisar a interacção veículo-estrutura foi implementado no submódulo *MainDynamicLinGaussElimNCSB* (ver secção 4.3.3), tendo sido introduzidas as seguintes subrotinas:

- 1) *CalcContactAuxData* – calcula tabelas auxiliares com informação sobre o contacto veículo-estrutura para tornar mais rápido o processamento da informação ao longo da análise;
- 2) *Calc_KII_KIX_KXX* – substitui a subrotina *Calc_NCSB_KFF*, de modo a ser possível considerar a classificação de graus de liberdade definida no Quadro 3.2;
- 3) *CalcContactArray* – calcula as submatrizes \bar{d}_{IX} , \bar{I}_{XX} , \bar{f}_{XX} e \bar{g}_X do sistema de equações misto (3.55) e também as matrizes \underline{d}_{IX} e \underline{d}_{PX} , necessárias para o cálculo dos vectores de forças efectivas definidos por (3.37) e (3.46), e o vector das reacções (3.23);
- 4) *SolveGaussElimInteraction* – resolve o sistema de equações misto definido por (3.55) de forma eficiente e directa, considerando as características específicas das diversas submatrizes.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA PONTE FERROVIÁRIA DE SÃO LOURENÇO

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o estudo efectuado sobre a ponte ferroviária de São Lourenço, situada na Linha do Norte da REFER, sobre o rio Arunca, perto de Pombal. Trata-se uma ponte metálica do tipo *bowstring*, sujeita à passagem de diversos tipos de comboios, nomeadamente, o comboio Alfa pendular. A secção 5.2 é integralmente dedicada à descrição da ponte.

Para analisar o comportamento dinâmico da ponte adoptou-se um modelo numérico bidimensional, composto por elementos finitos de pórtico 2D e elementos finitos de treliça 2D. O efeito composto tabuleiro-via na direcção longitudinal, devido às tensões de corte transmitidas ao longo da camada de balastro, é também considerado. Na secção 5.3 apresentam-se os elementos utilizados para modelar a ponte, as suas características geométricas e mecânicas e as principais propriedades dinâmicas do modelo.

A passagem do comboio Alfa pendular foi simulada por um conjunto de cargas móveis e por um modelo numérico em que são consideradas as características dinâmicas do comboio e a interacção veículo-estrutura. Na secção 5.4 apresenta-se, de forma sintética, as duas formas de modelação da acção do comboio.

Na secção 5.5 comparam-se os resultados numéricos, relativos à aceleração vertical do tabuleiro e às frequências naturais de vibração, com os resultados obtidos por intermédio de uma campanha experimental que envolveu a realização de um ensaio de vibração ambiental e de um ensaio dinâmico sob tráfego ferroviário.

Na secção 5.6. apresentam-se os resultados obtidos para a resposta dinâmica da ponte e para os níveis de vibração das carruagens do comboio. A resposta dinâmica do sistema ponte-comboio é avaliada em termos de segurança estrutural, segurança de via e conforto dos passageiros.

5.2 DESCRIÇÃO DA PONTE

A ponte ferroviária de São Lourenço está situada ao km 158.662 da Linha do Norte e permite a travessia do rio Arunca (ver Figura 5.1).

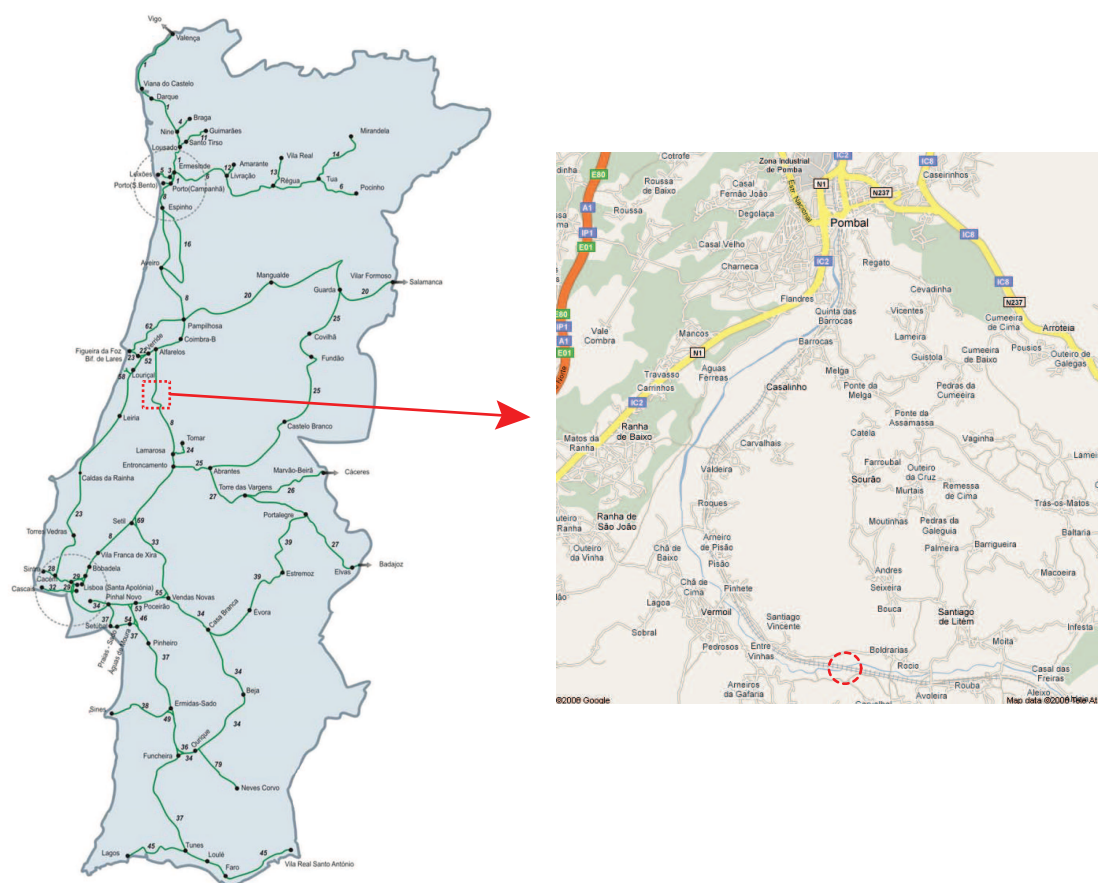


Figura 5.1 – Localização geográfica da ponte de São Lourenço.

Esta ponte foi remodelada no ano 2003 no âmbito do projecto de modernização da Linha do Norte (REFER E.P., 2003). Na Figura 5.2 apresenta-se uma vista geral da ponte.



Figura 5.2 – Vista geral da ponte de São Lourenço.

A ponte é constituída por dois tabuleiros estruturalmente independentes (ver Figura 5.3). A parte inferior dos tabuleiros é constituída por uma laje de betão armado e pré-esforçado. Os passadiços de serviço estão localizados no lado exterior dos tabuleiros, sendo constituídos por lajes em consola, betonadas conjuntamente com os tabuleiros.



Figura 5.3 – Vista longitudinal da ponte de São Lourenço.

A laje é apoiada por dois arcos de aço do tipo *bowstring* colocados lateralmente. Os arcos são compostos por peças metálicas de eixo quebrado, com secção em caixão. A geometria dos arcos corresponde ao anti-funcular das acções permanentes e, por esse motivo, os arcos estão sujeitos basicamente a esforços de compressão (Figura 5.4). Junto às nascenças dos arcos estão colocados tirantes diagonais de aço de alta resistência, para diminuir os momentos flectores gerados devido à passagem de tráfego ferroviário.

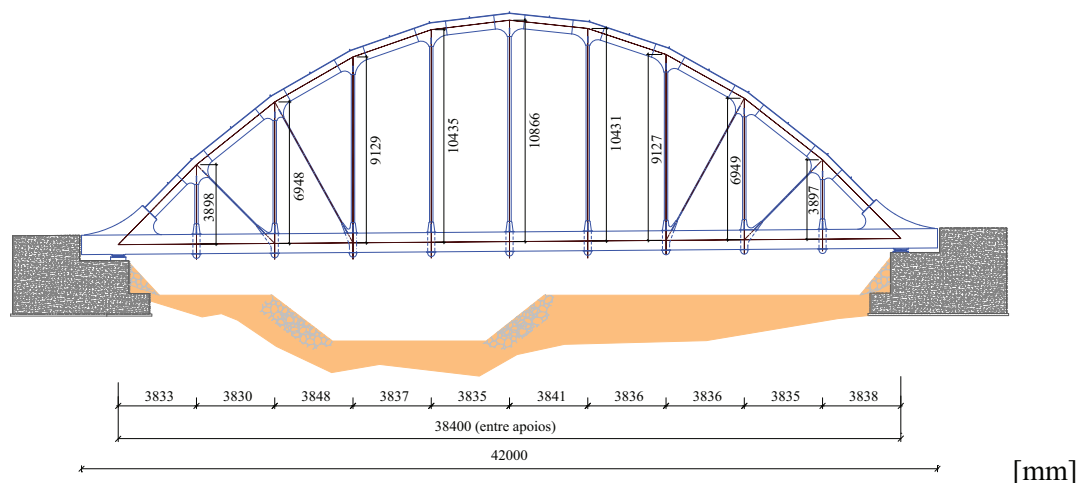


Figura 5.4 – Alçado da ponte de São Lourenço.

A ponte tem um comprimento total de 42 m (ver Figura 5.4). Cada tabuleiro apresenta uma largura constante de 5.8 m (ver Figura 5.5), sem os passadiços laterais, e possui uma forma em U para permitir a colocação da camada de balastro no seu interior.

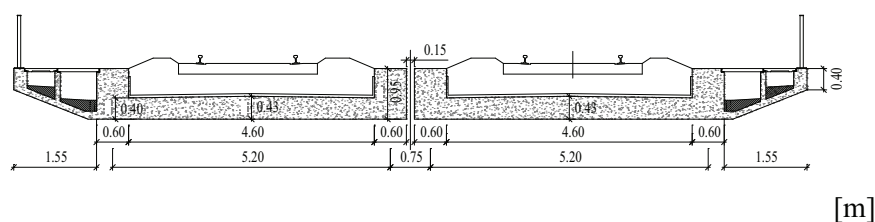


Figura 5.5 – Corte transversal da ponte de São Lourenço.

A espessura da laje na zona onde assenta a camada de balastro varia entre 0.40 e 0.43 m e as nervuras laterais que fazem parte da secção em U têm uma altura de 0.95 m. As referidas nervuras são complanares com os arcos do tabuleiro, estando por esse motivo sujeitas a esforços de tracção. Para compensar estes esforços de tracção, as nervuras laterais são pré-esforçadas longitudinalmente. A zona central da laje é também pré-esforçada longitudinalmente para uniformizar os esforços de compressão em toda a secção transversal.

Os dois arcos laterais de cada tabuleiro estão unidos por um contraventamento para assegurar a sua estabilidade lateral e a transmissão das forças horizontais transversais aos apoios (ver Figura 5.6). O referido contraventamento é constituído por travessas em tubo

rectangular e diagonais em dupla cantoneira. Cada arco apenas é contraventado na zona central, onde a altura é superior a 8 metros (ver Figura 5.4 e Figura 5.6).

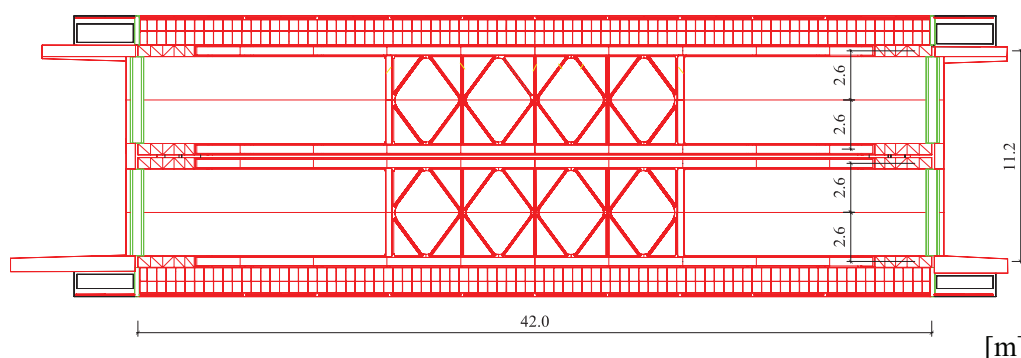


Figura 5.6 – Planta da ponte de São Lourenço.

As ligações entre o arco e a laje atravessam esta última de modo a permitir ligações contínuas entre ambos. Na Figura 5.7 encontram-se representadas as referidas ligações, na parte superior e inferior da laje.



a)



b)

Figura 5.7 – Ligações entre o arco e a laje: a) vista superior; b) vista inferior.

Num dos topos de cada tabuleiro existe uma fixação longitudinal ao encontro, localizada sobre o eixo da ponte. Esta fixação é realizada por um par de varões *Dywidag*, que atravessam um maciço saliente sob a laje e um plinto betonado sobre a mesa do encontro (ver Figura 5.8). A quase totalidade das forças horizontais longitudinais do tabuleiro é transmitida ao encontro por intermédio da referida fixação, evitando assim que as forças sejam transmitidas pelos aparelhos de apoio.

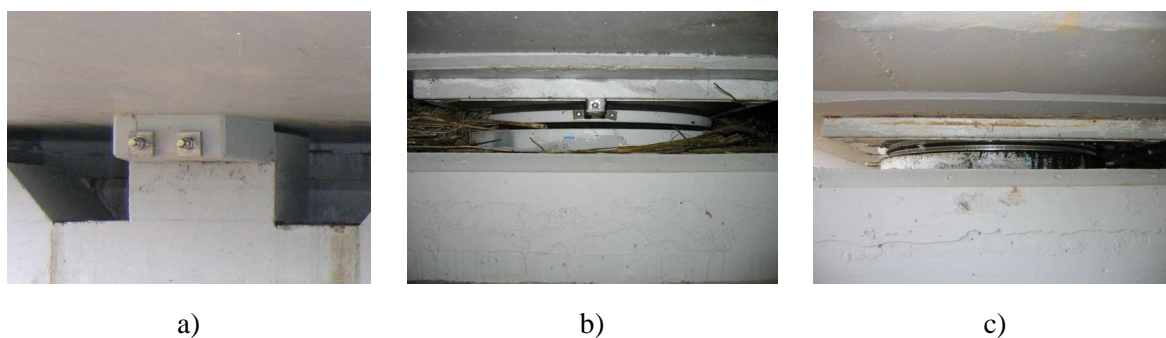


Figura 5.8 – Aparelhos de fixação e de apoio: a) varões *Dywidag*; b) apoio guiado; c) apoio móvel.

Os aparelhos de apoio são do tipo *POT*, sendo as forças horizontais transversais transmitidas aos encontros pelos aparelhos de apoio guiados, situados no lado interior de cada tabuleiro. Os restantes aparelhos de apoio são móveis em todas as direcções (ver Figura 5.8).

Cada encontro é composto por um muro de testa e dois muros de ala, apoiados em micro-estacas e solidarizados com os muros adjacentes de alvenaria que existiam antes da remodelação da ponte (ver Figura 5.9).



Figura 5.9 – Vistas do encontro da ponte: a) muro de testa; b) muro de ala.

A camada de balastro de cada tabuleiro tem aproximadamente 0.50 m de altura. As travessas de betão estão apoiadas na camada de balastro e os carris assentam em palmilhas posicionadas sobre as travessas. Os carris são do tipo UIC 54. Na Figura 5.10 encontra-se representado um pormenor da via na ponte.



Figura 5.10 – Pormenor da via na ponte.

5.3 MODELAÇÃO DA PONTE

5.3.1 Discretização da estrutura

Para analisar o comportamento dinâmico da ponte de São Lourenço adoptou-se o modelo numérico bidimensional representado na Figura 5.11. O modelo foi inicialmente desenvolvido no programa ANSYS 11.0 para estudar as suas características dinâmicas, tais como modos e frequências de vibração. Posteriormente o modelo foi convertido para o programa FEMIX 4.0 por intermédio do programa *ConvertAnsysDat*, desenvolvido especificamente para essa tarefa. Este programa é muito versátil pois utiliza as tabelas geradas no programa ANSYS com a informação sobre as propriedades geométricas e mecânicas do modelo, coordenadas dos nós, nós dos elementos e condições de apoio, para rapidamente converter o modelo de ANSYS para FEMIX.

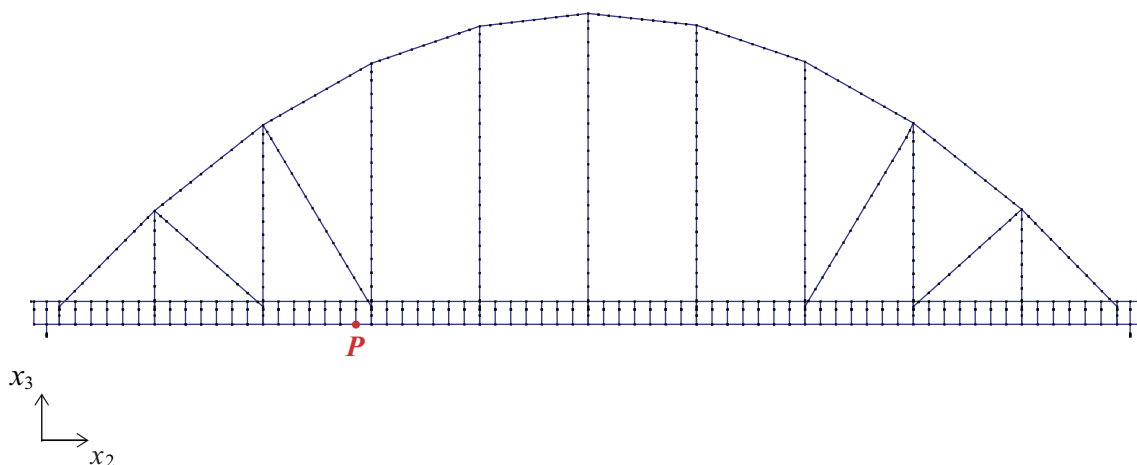


Figura 5.11 – Modelo numérico da ponte de São Lourenço.

O modelo numérico da ponte é composto por 632 elementos finitos de pórtico 2D (denominados no ANSYS por *BEAM3*) e 81 elementos finitos de treliça 2D (denominados no ANSYS por *LINK1*).

5.3.2 Propriedades geométricas e mecânicas

Nesta secção descrevem-se as propriedades geométricas e mecânicas adoptadas para o modelo numérico da ponte de São Lourenço. As propriedades adoptadas foram calibradas por Ribeiro *et al.* (2007).

5.3.2.1 Laje

A laje inferior do tabuleiro, em betão armado e pré-esforçado, é discretizada em elementos finitos de pórtico 2D, representados na Figura 5.12.

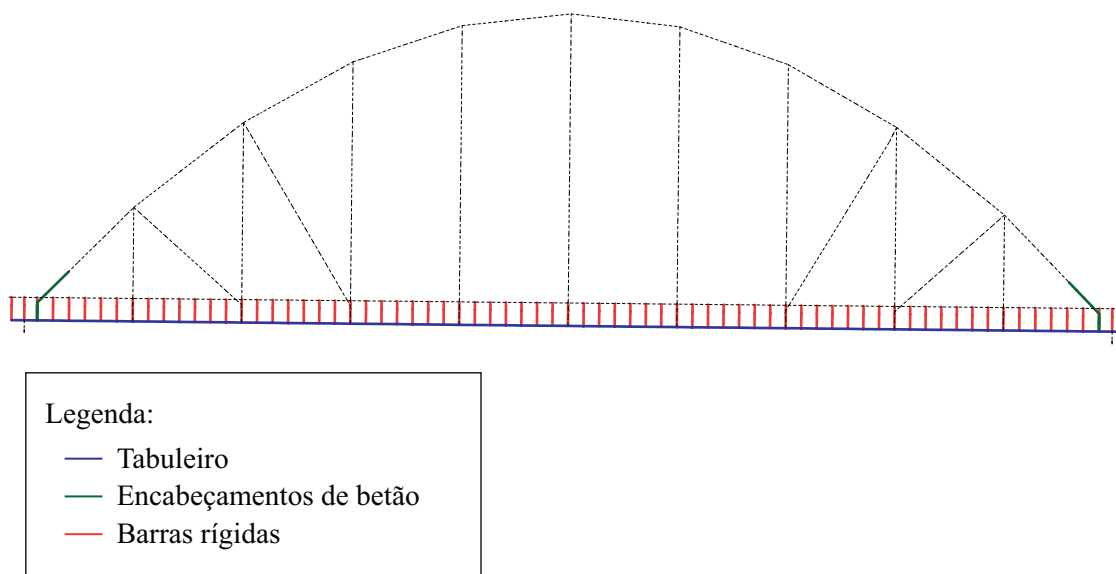


Figura 5.12 – Elementos finitos utilizados na modelação da laje.

Na Figura 5.13 encontra-se representado um corte da secção transversal da laje.

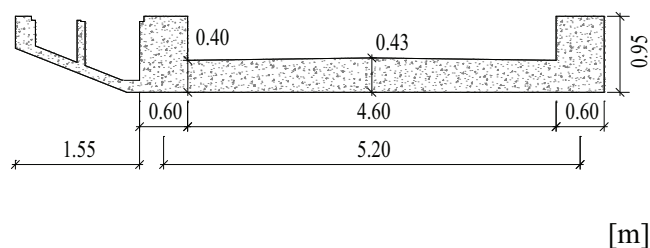


Figura 5.13 – Corte da secção transversal da laje.

As propriedades geométricas e mecânicas dos elementos de pórtico 2D que constituem a laje encontram-se indicadas no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Propriedades geométricas e mecânicas do tabuleiro.

	Valor	Unidades
ρ	3531.4	kg/m ³
E	43.076	GPa
ν	0.20	-
A	3.3890	m ²
I	0.19586	m ⁴

A massa específica indicada no Quadro 5.1 corresponde à massa do tabuleiro, adicionada das massas das tampas pré-fabricadas, das guardas metálicas, dos revestimentos do passadiço e do tabuleiro, do balastro, das travessas e dos carris.

A laje é composta por encabeçamentos de betão armado em cada uma das suas extremidades que permitem a ligação aos arcos (ver Figura 5.2), sendo as suas propriedades geométricas e mecânicas indicadas no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 – Propriedades geométricas e mecânicas dos encabeçamentos do tabuleiro.

	Valor	Unidades
ρ	2177.7	kg/m ³
E	43.076	GPa
ν	0.20	-
A	1.20	m ²
I	0.10	m ⁴

As barras verticais rígidas (ver Figura 5.12) ligam os elementos de viga que simulam a laje e os carris. O efeito compósito tabuleiro-via na direcção longitudinal, devido às tensões de corte transmitidas ao longo da camada de balastro, é modelado por um conjunto de molas com comportamento linear e com uma rigidez de 10000 kN/m por metro de desenvolvimento da via (Ribeiro *et al.*, 2007), dispostas horizontalmente e colocadas na altura correspondente à base das travessas. As molas são modeladas no FEMIX 4.0 por elementos de treliça 2D. Na Figura 5.14 é apresentada uma vista pormenorizada da ligação tabuleiro-via.

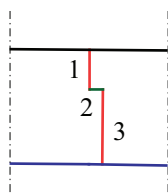


Figura 5.14 – Ligação tabuleiro-via.

As barras 1 e 3 são rígidas, quer à flexão, quer axialmente, e a barra 2 simula o efeito compósito tabuleiro-via. Para assegurar a continuidade entre as barras 1 e 3 é efectuada uma compatibilização dos deslocamentos verticais e rotações de ambos os nós da barra 2.

5.3.2.2 Arcos

Os arcos da ponte são de aço, sendo discretizados em elementos finitos de pórtico 2D, representados na Figura 5.15.

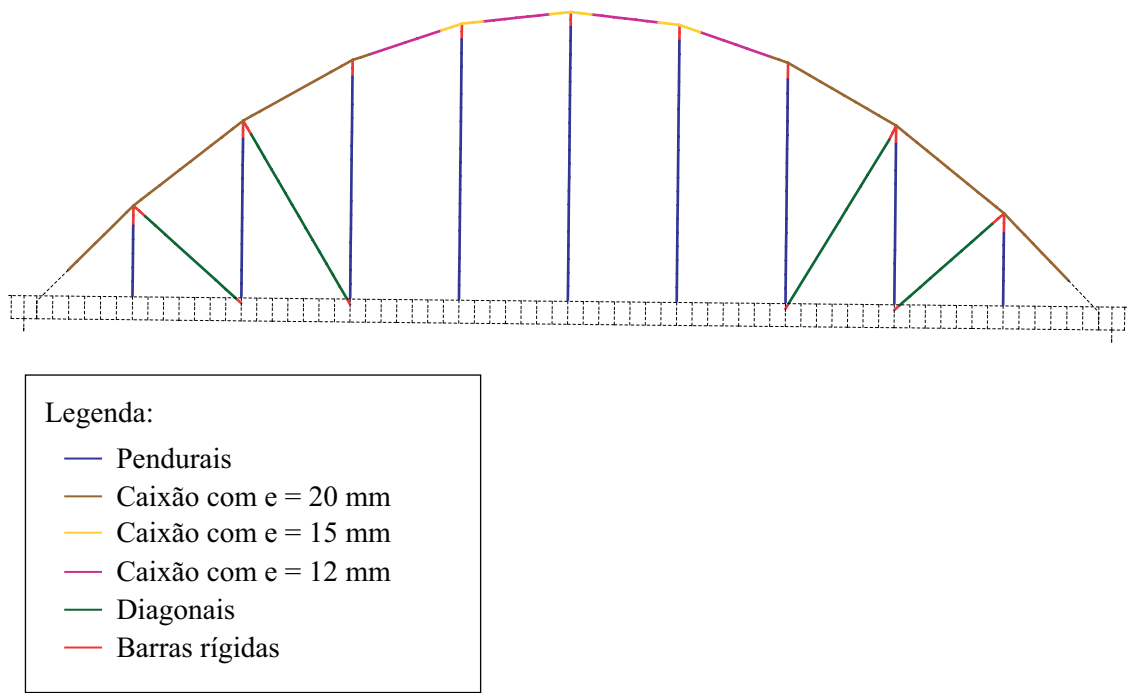
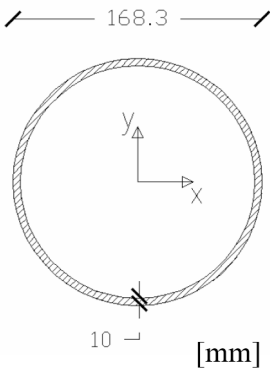


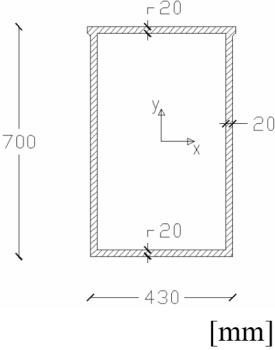
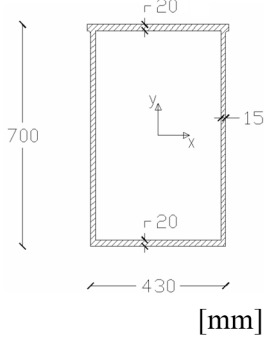
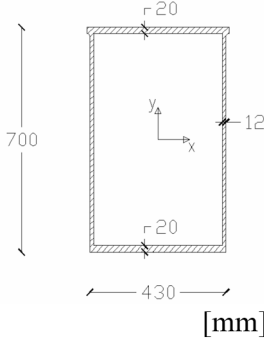
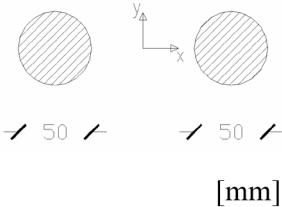
Figura 5.15 – Elementos finitos utilizados na modelação do arco.

As barras rígidas representadas na Figura 5.15 simulam as ligações entre os diversos elementos que compõem o arco. As propriedades geométricas e mecânicas dos restantes elementos são especificadas no Quadro 5.3 e no Quadro 5.4, respectivamente.

Quadro 5.3 – Propriedades geométricas dos elementos do arco.

Elemento do Arco	Secção	Propriedades Geométricas
Pendurais		$A = 49.64\text{ cm}^2$ $I = 1560\text{ cm}^4$

Quadro 5.3 (continuação) – Propriedades geométricas dos elementos do arco.

Elemento do Arco	Secção	Propriedades Geométricas
Caixão com 20 mm de espessura de alma		$A = 0.0436 \text{ m}^2$ $I = 29.47 \text{ m}^4$
Caixão com 15 mm de espessura de alma		$A = 0.0370 \text{ m}^2$ $I = 25.64 \text{ m}^4$
Caixão com 12 mm de espessura de alma		$A = 0.0330 \text{ m}^2$ $I = 1560 \text{ m}^4$
Diagonais		$A = 39.27 \text{ cm}^2$ $I = 61.36 \text{ cm}^4$

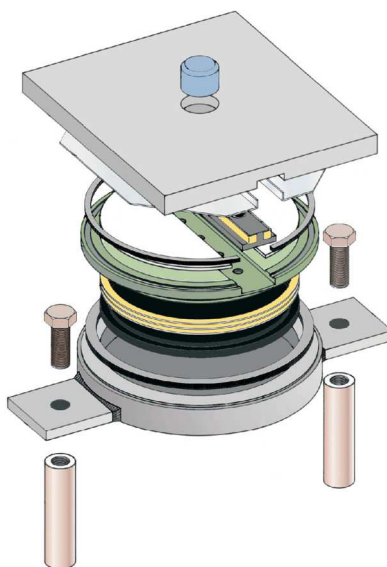
Os valores apresentados no Quadro 5.3 têm de ser multiplicados por dois, dado que o modelo 2D da ponte engloba os dois arcos do tabuleiro.

Quadro 5.4 – Propriedades mecânicas dos elementos do arco.

	Valor	Unidades
ρ	7850	kg/m ³
E	210	GPa
ν	0.30	-

5.3.2.3 Apoios

Os aparelhos da ponte são do tipo *AlgaPot*, sendo compostos por uma borracha confinada dentro de uma panela de aço (ver Figura 5.16). Além destes elementos, existe ainda um pequeno disco de *teflon* lubrificado para possibilitar uma maior mobilidade entre o apoio e a estrutura.

Figura 5.16 – Aparelho de apoio do tipo *AlgaPot*.

As características mecânicas do aço são iguais às utilizadas para outros elementos da ponte (ver Quadro 5.4). As propriedades mecânicas do *teflon* e da borracha encontram-se indicadas no Quadro 5.5 e no Quadro 5.6, respectivamente.

Quadro 5.5 – Propriedades mecânicas do teflon.

	Valor	Unidades
E	500	MPa
ν	0.46	-

Quadro 5.6 – Propriedades mecânicas da borracha.

	Valor	Unidades
E	439	MPa
ν	0.48	-

5.3.2.4 Carril

Os carris são do tipo UIC 54. O carril é em aço e por isso as suas propriedades mecânicas são iguais às especificadas no Quadro 5.4. A secção transversal encontra-se representada na Figura 5.17 a as suas propriedades geométricas estão indicadas no Quadro 5.7.

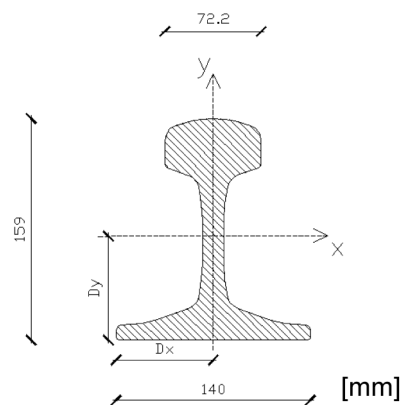


Figura 5.17 – Secção transversal do carril UIC 54.

Quadro 5.7 – Propriedades geométricas do carril.

	Valor	Unidades
A	69.34	cm ²
I	2127	cm ⁴

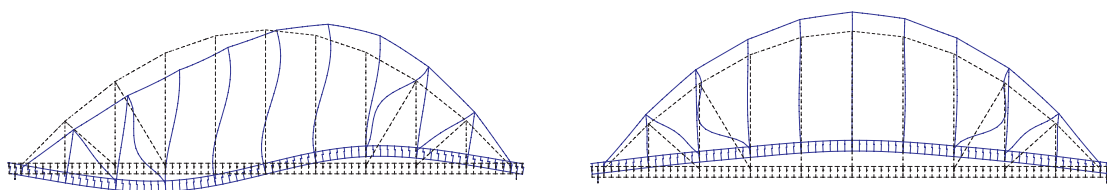
Os valores apresentados no Quadro 5.7 têm de ser multiplicados por dois, dado que o modelo 2D da ponte engloba os dois carris.

5.3.3 Características dinâmicas do modelo numérico

Na Figura 5.18 apresentam-se as configurações associadas aos três primeiros modos de vibração verticais da ponte (1V, 2V e 3V) e as respectivas frequências naturais.

1º modo vertical (1V): $f = 4.25$ Hz

2º modo vertical (2V): $f = 6.20$ Hz



3º modo vertical (3V): $f = 9.94$ Hz

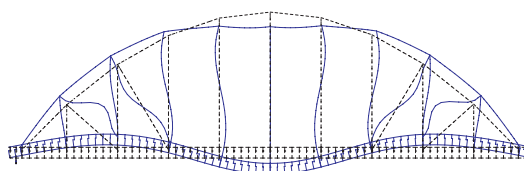


Figura 5.18 – Modos de vibração e frequências naturais da ponte.

5.4 MODELAÇÃO DO COMBOIO

O comboio Alfa pendular é composto por seis carruagens. Cada carruagem tem dois bogies, cada um com dois eixos (ver Figura 5.19). O peso total da composição é de 323.3 t para um carregamento normal, sendo o valor da tara de 298.3 t. O comprimento total da composição é 158.90 m.

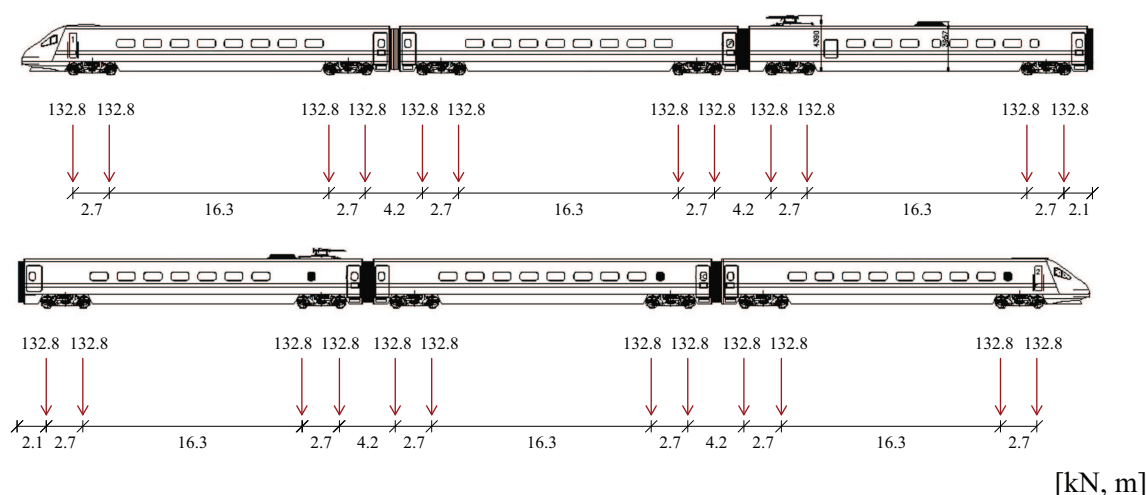


Figura 5.19 – Comboio Alfa pendular e respectivo conjunto de cargas móveis.

Para analisar o comportamento dinâmico da ponte, sem considerar a interação veículo-estrutura, modela-se o comboio Alfa pendular como um conjunto de cargas móveis, que simulam as acções verticais do mesmo (ver Figura 5.19). Para avaliar de forma mais precisa o comportamento dinâmico da ponte ou para analisar a resposta dinâmica do veículo é necessário modelar este último tendo em atenção as suas características dinâmicas e considerar a interação existente entre os dois sistemas. Na Figura 5.20 encontra-se representado o modelo numérico do comboio, que consiste em corpos rígidos de massa M_c a simular a caixa do veículo, corpos rígidos de massa M_b a simular os bogies, molas de rigidez k_p (ou k_s) e amortecedores com constante de amortecimento c_p (ou c_s) a simular as suspensões primárias (ou secundárias), molas de rigidez k_h a simular a ligação roda-carril e massas M_e a simular os eixos e as rodas.

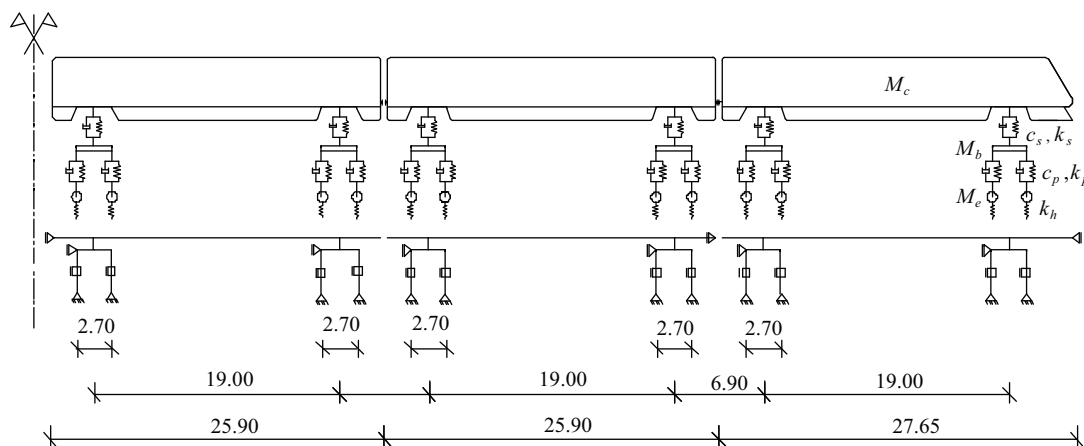


Figura 5.20 – Modelo numérico do comboio Alfa pendular.

Na Figura 5.21 apresentam-se as configurações associadas aos quatro primeiros modos de vibração de um dos veículos do comboio e as respectivas frequências naturais. Os dois primeiros modos correspondem essencialmente a movimentos da caixa (translação e rotação). Os restantes dois modos estão relacionados com os movimentos dos bogies.

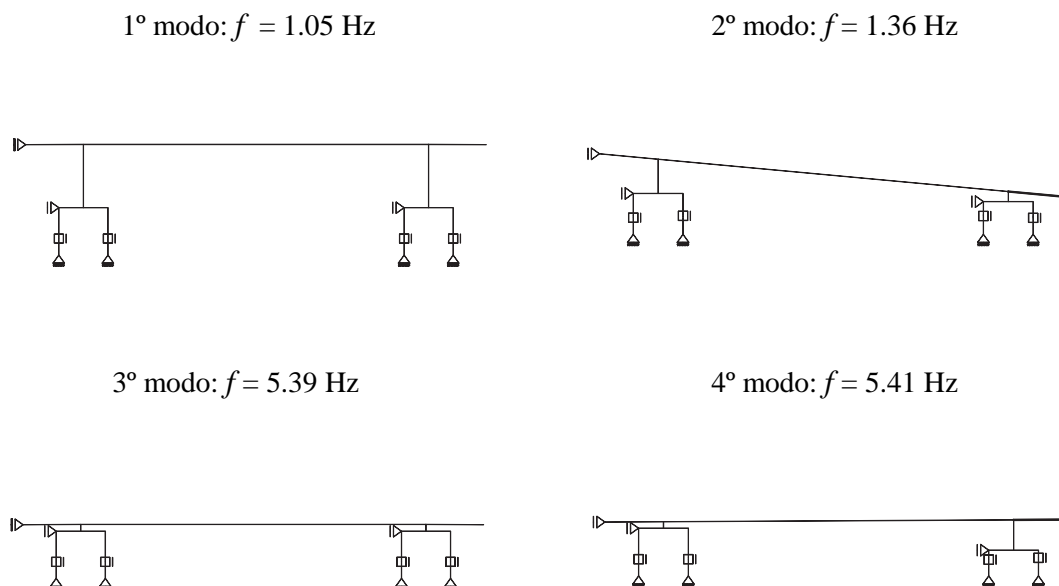


Figura 5.21 – Modos de vibração e frequências naturais do comboio.

5.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Foi realizada uma campanha experimental que envolveu a realização de um ensaio de vibração ambiental e de um ensaio dinâmico sob tráfego ferroviário (Ribeiro *et al.*, 2007). O ensaio de vibração ambiental permitiu a identificação das propriedades dinâmicas da estrutura, nomeadamente das suas frequências naturais, modos de vibração e coeficientes de amortecimento. O ensaio dinâmico sob tráfego ferroviário permitiu obter registos da aceleração vertical em diferentes pontos do tabuleiro.

No Quadro 5.8 comparam-se as frequências obtidas por via numérica e experimental, podendo observar-se uma boa concordância entre os valores calculados e medidos.

Quadro 5.8 – Frequências naturais de vibração.

Modo	Frequência (Hz)	
	Experimental	Numérica
1V	4.49	4.25 (-5.4%)
2V	6.05	6.20 (2.5%)
3V	9.96	9.94 (-0.2%)

O modelo foi de seguida utilizado na previsão da resposta dinâmica da ponte para a passagem do comboio Alfa pendular e os resultados obtidos foram comparados com os resultados das medições.

A análise dinâmica com interacção ponte-comboio foi realizada pelo método- α (ver secção 2.4.2), tendo-se adoptado os parâmetros $\alpha = 0$, $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ e um incremento de tempo $\Delta t = 0.002$ s. Os parâmetros para a construção da matriz de amortecimento de Rayleigh da ponte foram determinados fixando para os modos 1V e 3V os valores dos coeficientes de amortecimento determinados experimentalmente, ou seja, 1.4% e 2.4%.

Na Figura 5.22 comparam-se os resultados numéricos e experimentais relativos à aceleração vertical do tabuleiro no ponto P (ver Figura 5.11), para a passagem do comboio Alfa pendular a 155 km/h. Ambos os registos correspondem a registos filtrados por intermédio de um filtro do tipo passa-baixo de Chebyshev (Tipo II), de ordem 20, com frequência de corte igual a 30 Hz.

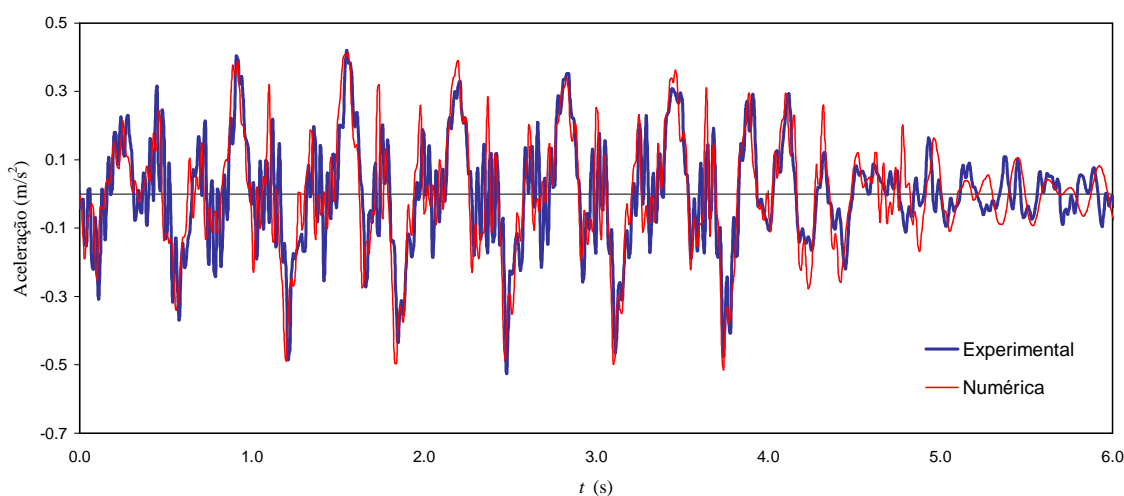


Figura 5.22 – Aceleração vertical do tabuleiro para a passagem do comboio a 155 km/h.

5.6 RESPOSTA DINÂMICA DO SISTEMA PONTE-COMBOIO

Foram efectuadas análises dinâmicas para velocidades situadas entre 140 e 420 km/h, com intervalos de 5 km/h, perfazendo um total de 57 velocidades.

5.6.1 Resposta dinâmica da ponte

Na Figura 5.23 apresentam-se as respostas dinâmicas da ponte em termos de aceleração vertical a um quarto de vão do tabuleiro, para velocidades de 155 km/h e 395 km/h, e a meio vão, para velocidades de 155 km/h e 295 km/h.

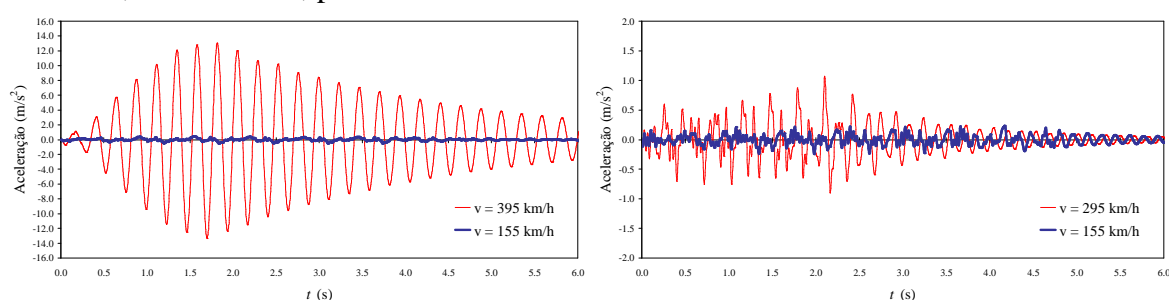


Figura 5.23 – Aceleração vertical: a) quarto de vão; b) meio vão.

Na Figura 5.24 apresentam-se, por sua vez, os valores máximos da aceleração vertical nas secções referidas, para velocidades entre os 140 e os 420 km/h.

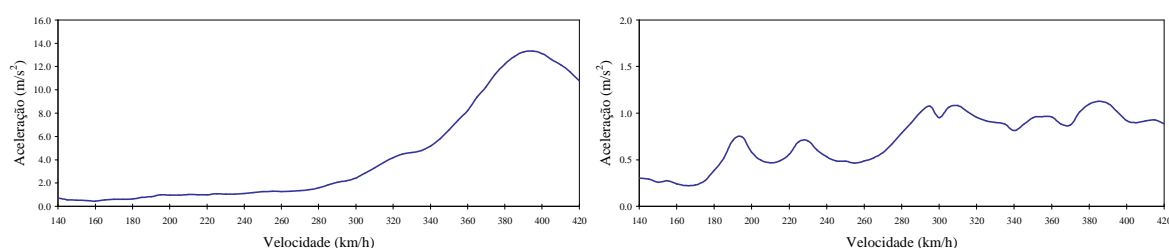


Figura 5.24 – Valores máximos da aceleração vertical: a) quarto de vão; b) meio vão.

A observação da Figura 5.24 permite identificar a ocorrência de picos da resposta dinâmica para velocidades de 395 km/h, no caso da secção a um quarto de vão, e 195 km/h, 230 km/h, 295 km/h e 310 km/h, no caso da secção a meio vão.

A passagem sobre a ponte de um comboio formado por vários eixos ou grupos de eixos regularmente espaçados pode, em certas condições, provocar a ressonância da estrutura. Se d for o afastamento regular entre os grupos de eixos, as velocidades para as

quais tendem a ocorrer efeitos de ressonância são obtidas por intermédio da seguinte relação

$$v_{res}(i,j) = \frac{d n_j}{i} \quad (5.1)$$

na qual n_j é a frequência correspondente ao j -ésimo modo de vibração da estrutura e i pode tomar os valores 1, 2, 3, 4, ... ou 1/2, 1/3, 1/4.

Para o comboio Alfa pendular, o afastamento regular entre grupos de eixos é igual a 25.90 m (ver Figura 5.20). É possível então verificar que estas velocidades críticas correspondem a: i) no caso da secção a um quarto de vão, à excitação da estrutura com frequência igual à frequência do modo de vibração 1V ($v_{res} = 25.9 \times 4.25 / 1 \times 3.6 = 396 \text{ km/h} \approx 395 \text{ km/h}$); ii) no caso da secção a meio vão, à excitação da estrutura com frequências iguais a 1/2 e 1/3 da frequência do modo de vibração 2V ($v_{res} = 25.9 \times 6.20 / 2 \times 3.6 = 289 \text{ km/h} \approx 295 \text{ km/h}$ e $v_{res} = 25.9 \times 6.20 / 3 \times 3.6 = 193 \text{ km/h} \approx 195 \text{ km/h}$) e com frequências iguais a 1/3 e 1/4 da frequência do modo de vibração 3V ($v_{res} = 25.9 \times 9.94 / 3 \times 3.6 = 309 \text{ km/h} \approx 310 \text{ km/h}$ e $v_{res} = 25.9 \times 9.94 / 4 \times 3.6 = 232 \text{ km/h} \approx 230 \text{ km/h}$).

5.6.2 Resposta dinâmica do comboio

A realização de análises dinâmicas com interacção ponte-comboio é particularmente útil para a avaliação do conforto dos passageiros pois permite avaliar as vibrações a que ficam submetidas as caixas das carruagens. Na Figura 5.25 apresentam-se, a título de exemplo, registos gráficos relativos à evolução temporal da aceleração vertical no interior das caixas da primeira e última carruagens para a velocidade de 155 km/h, para a qual não ocorre ressonância, e de 395 km/h, para a qual ocorre ressonância do modo de vibração 1V.

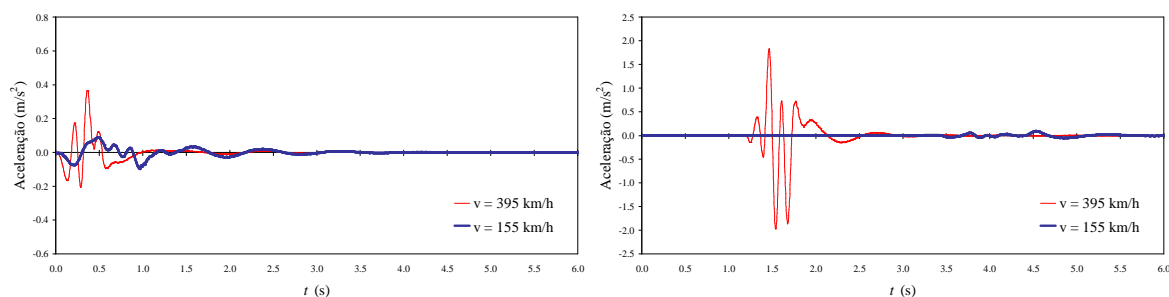


Figura 5.25 – Aceleração vertical: a) primeira carruagem; b) última carruagem.

Na Figura 5.26 apresentam-se, por sua vez, os valores máximos da aceleração vertical no interior das caixas da primeira e última carruagens, para velocidades entre os 140 e os 420 km/h. O nível máximo de aceleração ocorre na última carruagem para velocidades correspondentes à ressonância da ponte.

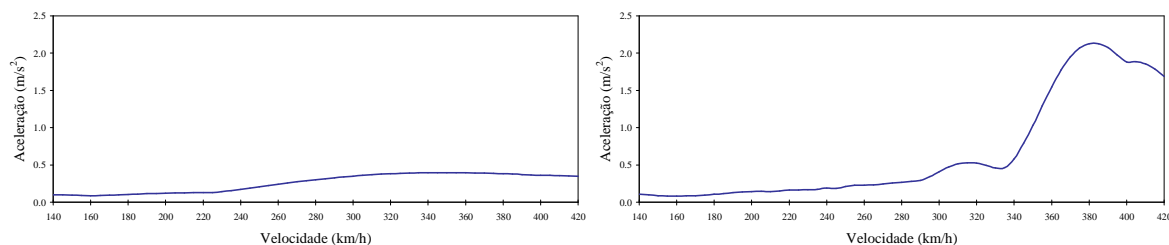


Figura 5.26 – Valores máximos da aceleração vertical: a) primeira carruagem; b) última carruagem.

5.6.3 Avaliação da resposta dinâmica

Nesta secção a resposta do sistema é avaliada do ponto de vista da segurança estrutural, da segurança da via e do conforto dos passageiros, tendo por base as disposições regulamentares presentes nas normas EN1991-2 (2003) e EN 1990 - Annex A2 (2005).

5.6.3.1 Segurança estrutural

As amplificações dinâmicas ϕ'_{dyn} associadas à passagem do comboio Alfa pendular foram calculadas com base nos resultados das análises dinâmicas apresentados anteriormente. Os valores de ϕ'_{dyn} foram corrigidos do factor ϕ'' para ter em consideração as irregularidades da via. O Quadro 5.9 mostra uma comparação entre os deslocamentos verticais máximos, a um quarto e a meio vão, obtidos por intermédio de uma análise dinâmica com o comboio Alfa pendular e por intermédio da aplicação do modelo de carga

LM 71, sendo estes resultados majorados pelo respectivo coeficiente de amplificação dinâmica Φ_2 .

Quadro 5.9 – Deslocamentos verticais máximos a um quarto e a meio vão.

Modelo	Quarto de vão (mm)	Meio vão (mm)
LM 71	12.75	8.01
Alfa pendular	18.95	2.15

5.6.3.2 Segurança da via

A norma EN 1990 - Annex A2 (2005) estabelece estados limites de deformação e vibração a considerar no dimensionamento das pontes ferroviárias. As limitações visam assegurar a segurança da circulação e dizem respeito à: i) aceleração vertical do tabuleiro; ii) torção do tabuleiro; iii) deformação vertical do tabuleiro; iv) deformação horizontal do tabuleiro.

No que se refere, por exemplo, à aceleração vertical do tabuleiro, valores excessivos deste parâmetro podem conduzir à instabilização da camada de balastro ou à perda de contacto entre a roda e o carril. O valor de pico da aceleração vertical no caso de pontes com tabuleiro balastrado não deverá exceder 3.5 m/s^2 ($\approx 0.35g$).

A análise da Figura 5.24 permite verificar que o limite regulamentar só é ultrapassado para velocidades superiores a 310 km/h.

5.6.3.3 Conforto dos passageiros

Dado que o conforto dos passageiros depende do valor de pico da aceleração vertical no interior das carruagens, a norma EN 1990 - Annex A2 (2005) limita esses valores a 1.0, 1.3 e 2.0 m/s^2 , que correspondem a níveis de conforto “muito bom”, “bom” e “aceitável”.

A análise da Figura 5.26 permite verificar que o nível de conforto é “muito bom” na primeira carruagem para qualquer velocidade considerada no intervalo estudado. No caso da última carruagem, o nível de conforto é “muito bom” para velocidades inferiores a

345 km/h. Para velocidades em torno da velocidade ressonante, 395 km/h, o conforto dos passageiros mantém-se no limiar do aceitável.

5.6.4 Tempos de cálculo

Num computador pessoal a 2.13 GHz foram efectuadas análises dinâmicas para 57 velocidades diferentes. As malhas de elementos finitos da ponte e do comboio têm 1860 e 192 graus de liberdade não prescritos, respectivamente. Cada análise efectuada corresponde ao período decorrido entre a entrada do primeiro eixo do comboio na ponte e a saída do último eixo. Foram realizadas no programa FEMIX 4.0, 57 análises dinâmicas sem interacção que demoraram 1058 s e com interacção que demoraram 3526 s. No Quadro 5.10 apresentam-se os tempos de execução das análises dinâmicas realizadas para a velocidade de 155 km/h.

Quadro 5.10 – Tempos de execução das análises dinâmicas realizadas para a velocidade de 155 km/h.

Tipo de análise	Tempo (s)
Sem interacção	34
Com interacção	126

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

O estudo e desenvolvimento de metodologias de análise dinâmica com interacção veículo-estrutura, em vias ferroviárias de alta velocidade, constituíram o principal objectivo da presente dissertação.

Os problemas correntes no âmbito da Engenharia de Estruturas são de natureza contínua, tendo-se utilizado o Método dos Elementos Finitos para proceder à sua discretização espacial. Esta formulação foi aplicada aos elementos de viga e sólidos tridimensionais, tendo permitido, no caso dos elementos de viga, obter um elemento finito mais genérico do que o que seria obtido mediante a utilização de expressões clássicas (Paz, 1997). Na dedução da matriz de massa clássica do elemento de viga de Euler-Bernoulli apenas são consideradas as forças de inércia associadas a acelerações de translação segundo os eixos x_1 , x_2 e x_3 e as associadas a acelerações de rotação em torno do eixo x_1 . Archer (1965) analisou os efeitos relacionados com os momentos de inércia de massa relativamente aos eixos x_2 e x_3 e propôs termos adicionais para a matriz de massa. A formulação das equações de equilíbrio dinâmico referida anteriormente permitiu incluir directamente os termos adicionais da matriz de massa propostos pelo referido autor.

No âmbito dos problemas abordados na presente dissertação, considera-se que os métodos de integração directa, em particular o método de Newmark e o método- α , apresentam uma grande eficiência e precisão na resolução da equação de equilíbrio dinâmico. Dado que o método de Newmark se reduz ao método- α para $\alpha = 0$, apenas foi

implementado o método- α no programa de cálculo automático FEMIX 4.0. Este método permite considerar amortecimento algorítmico nos modos de vibração com frequências elevadas, o que se revela de grande importância para eliminar participações espúrias relacionadas com as contribuições desses modos.

A análise dinâmica linear foi implementada no programa FEMIX 4.0 para o seguinte tipo de estruturas: reticuladas 2D e 3D; articuladas 2D e 3D e discretizadas por elementos de volume. Nesta fase, procurou-se manter a eficiência de todo o código, dado que, numa análise dinâmica, qualquer ineficiência existente pode eventualmente ser repetida em milhares de intervalos de tempo.

O comportamento dinâmico de uma estrutura sujeita à passagem de um veículo pode ser analisado com ou sem a consideração da interacção entre os dois sistemas. Nos casos em que a interacção não influencie significativamente o comportamento dinâmico da estrutura, as acções do veículo podem ser simuladas com um conjunto de cargas móveis. Nos outros casos, nomeadamente em vias de alta velocidade, para avaliar de forma mais precisa o referido comportamento dinâmico ou para analisar a resposta dinâmica do veículo, é necessário proceder à sua modelação considerando as suas características dinâmicas e a interacção existente entre os dois sistemas. O algoritmo que se destina à geração da informação correspondente ao conjunto de cargas móveis e o algoritmo para analisar a interacção veículo-estrutura foram implementados no programa FEMIX 4.0.

Durante a elaboração deste trabalho os resultados obtidos com o programa FEMIX 4.0 foram sempre comparados com resultados obtidos com outros programas de cálculo automático, nomeadamente o FEMIX 2.1 e o ANSYS 11.0. Deste modo, procedeu-se às seguintes validações:

- 1) os resultados obtidos para as análises dinâmicas efectuadas com elementos de viga e sólidos tridimensionais foram comparados com os resultados obtidos com o programa ANSYS 11.0;
- 2) os resultados obtidos para a análise do comportamento dinâmico de uma estrutura sujeita à passagem de uma carga móvel foram comparados com os resultados obtidos com programa ANSYS 11.0;
- 3) os resultados obtidos para a análise com interacção veículo-estrutura do comportamento dinâmico de uma viga simplesmente apoiada sujeita à

passagem de uma massa suspensa foram comparados com os resultados obtidos com o programa FEMIX 2.1.

Foi verificado que todos os resultados obtidos com os diferentes programas são praticamente coincidentes.

Finalmente, convém realçar que a preocupação em conseguir uma elevada eficiência em todo o código implementado no âmbito da presente dissertação (preocupação já existente no código que tinha sido implementado anteriormente a este trabalho), permitiu obter tempos de cálculo muito reduzidos. Deste modo, o programa revela-se muito competitivo na análise de estruturas complexas, em que o tempo de cálculo é muitas vezes um factor condicionante. Para se compreender melhor a referida eficiência, são apresentados no Quadro 6.1 os tempos de execução das análises dinâmicas realizadas no programa FEMIX 4.0, para a passagem do comboio Alfa pendular a 155 km/h sobre a ponte de São Lourenço.

Quadro 6.1 – Tempos de execução das análises dinâmicas realizadas para a velocidade de 155 km/h.

Tipo de análise	Tempo (s)
Sem interacção	34
Com interacção	126

6.2 PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Na sequência dos estudos realizados são apresentadas as principais perspectivas de desenvolvimentos futuros:

- 1) implementação da análise dinâmica para os restantes tipos de análise de estruturas, para os quais o FEMIX 4.0 já permite efectuar análises estáticas, em regime linear ou não linear material, nomeadamente:
 - i) estruturas submetidas a estado plano de tensão;
 - ii) estruturas submetidas a estado plano de deformação;
 - iii) estruturas submetidas a estado axissimétrico de tensão e deformação;

- iv) lajes (formulação de Mindlin);
 - v) cascas espessas (formulação de Ahmad);
 - vi) cascas planas (formulação de Mindlin);
- 2) estudo aprofundado das características de amortecimento algorítmico do método- α . Comparação e validação com soluções exactas obtidas por métodos analíticos;
 - 3) estudo e implementação do método- α generalizado (Chung & Hulbert, 1993);
 - 4) implementação de novas técnicas de resolução do sistema de equações lineares, nomeadamente, aplicação do método de eliminação de Gauss, sendo a matriz de rigidez armazenada em modo esparsa;
 - 5) melhoramento do código computacional de análise dinâmica linear com interacção veículo-estrutura, de forma a estender a interacção aos restantes tipos de elementos finitos;
 - 6) desenvolvimento de modelos dinâmicos apropriados para a ponte, via, interface roda-carril e comboios de alta velocidade;
 - 7) desenvolvimento de formas de modelar e combinar as acções de carácter ambiental (temperatura, vento e sismos) com as acções de tráfego ferroviário;
 - 8) implementação e validação de metodologias de análise dinâmica não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A

Archer, J. S. (1965). Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques. *AIAA journal*, 3 (10), 1910-1918.

Azevedo, A., & Barros, J. A. O. (1990). Análise comparativa de métodos directos e iterativos na resolução de grandes sistemas de equações lineares. *JPEE 90 - 2. Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, Lisboa, Portugal, A.91-A.102.

Azevedo, A. (1996a). *Mecânica dos sólidos*. 23 de Fevereiro de 2008, http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano2/ms/pdf/Apontamentos/Livro_Mecanica_dos_Solidos_AA.pdf

Azevedo, A. (1996b). *Cutil: biblioteca de apoio ao desenvolvimento de software em linguagem C*. 23 de Fevereiro de 2008, http://civil.fe.up.pt/Software/Cutil_V3_0/Cutil.pdf

Azevedo, A. (2003). *Método dos elementos finitos*. 23 de Fevereiro de 2008, http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/aae/pdf/Apontamentos/Livro_MEF_AA.pdf

Azevedo, A., Barros, J. A. O., Sena-Cruz, J. M., & Ventura-Gouveia, A. (2003). Software no ensino e no projecto de estruturas. *3º Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia*, Maputo, Moçambique, 81-92.

Azevedo, A., Neves, S. G., & Calçada, R. (2007). Dynamic analysis of the vehicle-structure interaction: a direct and efficient computer implementation [Abstract]. In J. C. de Sá et al. (Eds.), *Proceedings of the CMNE 2007 – Congress on Numerical Methods in Engineering / XXVIII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Porto, Portugal, 123.

B

Bathe, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Beer, F. P., Johnston, J., E. R., Eisenberg, E. R., & Staab, G. H. (2004). *Vector mechanics for engineers: Statics* (7^a ed.). Boston: McGraw Hill.

Bowe, C. J., & Mullarkey, T. P. (2005). Wheel-rail contact elements incorporating irregularities. *Advances in Engineering Software*, 36 (11-12), 827-837.

C

Calçada, R. (1995). *Efeitos dinâmicos em pontes resultantes do tráfego ferroviário a alta velocidade*. Tese de mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Calçada, R., & Cunha, A. (1998). Stochastic modelling of the dynamic behaviour of bridges under road traffic loads. In S.R. Idelsohn, E. Oñate, & E.N. Dvorkin (Eds.), *Proceedings of the Computational mechanics: New trends and applications*, Barcelona, Spain

Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Chung, J., & Hulbert, G. M. (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, 60 (2), 371-375.

Clough, R. W., & Penzien, J. (1993). *Dynamics of structures* (2^a ed.). New York: McGraw Hill.

Cook, R. D., Malkus, D. S., & Plesha, M. E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis* (3^a ed.). New York: John Wiley and Sons.

Correia de Araújo, F. (1961). *Elasticidade e plasticidade*. Acessível na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

D

Delgado, R., & Santos, S. M. (1997). Modelling of railway bridge-vehicle interaction on high speed tracks. *Computers & Structures*, 63 (3), 511-523.

E

EN1991-2 (2003). *Actions on structures – Part 2: General actions – traffic loads on bridges*. Brussels, Belgium: European Committee for Standardization.

EN 1990 - Annex A2 (2005). *Eurocode: Basis of structural design - Annex A2: application for bridges*. Brussels, Belgium: European Committee for Standardization.

F

Faria, R. (1994). *Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão através de um modelo de dano contínuo*. Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Fřýba, L. (1999). *Vibration of solids and structures under moving loads* (3^a ed.). Prague, Czech Republic: Thomas Telford.

Fřýba, L. (2005). Dynamics of bridges under moving loads (past, present and future). *Proceedings of the Dynamics of High-Speed Railway Bridges*, Porto, Portugal, 25-44.

H

Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., & Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5 (3), 283-292.

Hilber, H. M., & Hughes, T. J. R. (1978). Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 6 (1), 99-117.

Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method : Linear static and dynamic finite element analysis*. New York: Dover Publications.

K

Kargarnovin, M. H., Younesian, D., Thompson, D., & Jones, C. (2005). Ride comfort of high-speed trains travelling over railway bridges. *Vehicle System Dynamics*, 43 (3), 173-197.

L

Lou, P. (2005). A vehicle-track-bridge interaction element considering vehicle's pitching effect. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 (4), 397-427.

M

Massonnet, C. (1968). *Résistance des matériaux* (2ª ed.). Paris: Dunod.

P

Paz, M. (1997). *Structural dynamics : Theory and computation* (4ª ed.). New York: Chapman & Hall.

R

REFER E.P. (2003). *Substituição da ponte de São Lourenço ao km 158,662, Projecto de execução – Memória descritiva e justificativa*.

Ribeiro, D., Calçada, R., & Delgado, R. (2007). Calibração experimental de um modelo numérico da ponte ferroviária de São Lourenço. *VI Congresso de Construção Metálica e Mista*, Porto, Portugal, 113-122.

Rigueiro, C., Rebelo, C., & Silva, L. S. (2006). Resposta em frequência de pontes ferroviárias considerando a interacção veículo/balastro/ponte. *JPEE – 4ª Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, Lisboa, Portugal

U

UIC (2005). *High speed: rail's leading asset for customers and society*. 22 de Abril de 2008, <http://www.uic.asso.fr/download.php/gv/HighSpeed.pdf>

UIC (2008). *European HS network*. 22 de Abril de 2008, http://www.uic.asso.fr/download.php/gv/20080222_Maps_high_speed.pdf

Y

Yang, Y.-B., & Wu, Y.-S. (2001). A versatile element for analyzing vehicle-bridge interaction response. *Engineering Structures*, 23 (5), 452-469.

Yau, J. D., Yang, Y. B., & Kuo, S. R. (1999). Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars. *Engineering Structures*, 21 (9), 836-844.

Z

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1994). *The finite element method: Basic formulation and linear problems* (4^a ed., Vol. 1). London: McGraw-Hill.